Don. Lud. 567

Dom. Lud. 567

Lehrbuch

der niedern,

reinen, allgemeinen Größenlehre,

oder der

Buchstabenrechnung und Algebra,

zum Behufe

öffentlicher Vorlesungen und des Selbstunterrichtes

herausgegeben

von

Dr. Schön,

öffentlichem und ordentlichem Professor der Mathematik an der kön. baier. Universität Würzburg, und korrespondirendem Mitgliede der K. K. Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde.

Schön
Algebra

Würzburg,
im Verlage der Stahel'schen Buchhandlung.
1825.

191 BS dir

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Bereits im Jahre 1806 hatte ich eine, in acht gedruckten Bogen zusammengedrängte, Anleitung zum Studium der Buchstabenrechnung und Algebra herausgegeben. Dieselbe in Verbindung mit meiner, in ihrer ersten Auflage ein Jahr früher erschienenen, Ziffernrechnung diente bisher als Leitfaden bey meinem öffentlichen Unterrichte über die niedere allgemeine Größenlehre. Die große Kürze jener Anleitung ließ dem mündlichen Vortrage Vieles übrig, was nicht nur weitläufiger erklärt, sondern auch, den Fortschritten der Mathematik entsprechend, ergänzt werden mußte. Hiedurch wurde besonders das Nachholen des Vorgetragenen für Diejenigen meiner Zuhörer erschwert, die dem mündlichen Vortrage nicht folgen, oder das Vorgetragene nur fragmentarisch auffassen konnten. Zugleich vermochten nur Wenige die genannte Anleitung als Handbuch in der Art zu benützen, daß sie sich, nach Verlaufe mehrerer Jahre

mittels desselben auf eine leichte und schnelle Weise gleichsam neu orientirten, oder bey vorkommenden Fällen nöthigen Rathes erholten. Zur Unterstützung des Selbstunterrichtes war ohnedieß jene kurze Anleitung nicht geeignet.

Das eben Gesagte enthält die Gründe, die mich bestimmten, das erwähnte Lehrbuch, nachdem es vergriffen war, nicht gleichsam zu überarbeiten, dessen Grundlage vielmehr im Ganzen nur so anzuwenden, daß das neue Lehrbuch, das an die Stelle des früheren treten sollte, den vorhin gedachten Bedürfnissen abhelfend, zugleich meiner Hauptabsicht entspräche. Diese gieng nämlich dahin, die reine allgemeine Größenlehre, als Fundament der gesammten Mathematik, nicht nur gründlich, sondern auch bey möglichster Kürze deutlich und so umfassend darzustellen, daß das vorliegende, jenem wichtigsten Gegenstande innerhalb der Grenzen der niedern Mathematik gewidmete, Lehrbuch Alles enthielte, was zunächst zum leichten und gründlichen Studium der höheren Mathematik sowohl hinsichtlich des Inhaltes, als der Methode und namentlich der Anleitung zur Erfindung gefordert wird.

Ob ich durch dieses Lehrbuch, dessen Einrichtung rücksichtlich des Inhaltes unten von S. 36—38. an-

gegeben ist, den beabsichtigten Zweck erreicht habe, oder nicht, wird das Urtheil des Kritikers entscheiden, welcher das weite Gebiet der höheren Mathematik überschaut. Da wir dieses Gebiet weder mit Lust betreten, noch auf demselben mit Frucht wandern und mit erwünschtem Erfolge vorwärts dringen können (namentlich) ohne gründliche und vollständige elementare Theorie der Potenzen, Reihen, Logarithmen und Combinationen, und ohne die Erfindungskraft besonders durch das Studium der niedern Analysis hinreichend geübt zu haben: so habe ich den der Behandlung dieser Gegenstände bestimmten Abschnitten eine besondere Aufmerksamkeit widmen zu müssen geglaubt, um einer Seits nichts zu übergehen, was zur richtigen Einsicht und Vollständigkeit jener Lehren gehört, und um anderer Seits die mir vorgezeichneten Grenzen der niedern Mathematik nicht zu überschreiten. So habe ich z. B. die elementare Combinationslehre mit der noch wesentlich zum Vorhergehenden gehörigen Aufgabe des §. 163. geschlossen, weil von da an die combinatorische Darstellung oder die Entwickelung derjenigen combinatorischen Formen beginnt, welche man die combinatorischen Involutionen zu nennen pflegt. Mit diesen aber beginnt zugleich sowohl hinsichtlich der Behandlung als des Zweckes das Höhere der fruchtreichen Combinationstheorie.

Das Bewußtseyn übrigens, auf die aus wahrer Liebe zur Wissenschaft unternommene Ausarbeitung dieses Lehrbuches allen Fleiß gewendet zu haben, läßt mich hoffen, daß dasselbe, auch ausserhalb des engen Raumes der Schule, allen Denjenigen nicht unwillkommen seyn werde, welche für das gründliche Studium der Mathematik überhaupt reges Interesse haben.

Würzburg im December 1824.

Der Verfasser.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

I.

Allgemeine Einleitung.

A. Inbegriff der mathematischen Wissenschaften.

a. Mathematik.

1. Das, was an einem Dinge vermehrt oder vermindert gedacht werden kann, ohne daß es aufhört, dieses Ding zu seyn, heißt dessen Größe (Quantität). Genetisch ist die Quantität die Bestimmung, wievielmal zur Erzeugung eines Dinges ein ihm Gleichartiges (das Maß, die Einheit) mit sich selbst verbunden werden müsse.

2. Das aber an einem Dinge, wodurch dasselbe dieses und kein anderes Ding ist, heißt dessen Qualität (Beschaffenheit). Genetisch ist die Qualität die Bestimmung der Art, wie das Mannigfaltige eines Dinges in diesem zum Ganzen verbunden ist. Daß z. B. die Theile der Linie nach der Dimension, die wir Länge nennen, verbunden sind, gehört zur Qualität der Linie; dagegen enthält der Ausdruck „eine 3 Fuß lange Linie“ bloß die Bestimmung, die wir Quantität der Linie nennen.

3. Das Subjekt der Quantität, oder das Ding, dem Quantität zukömmt, heißt Größe (Quantum).

Die allgemeinste Eintheilung der Quanten ist erstens die in ausgedehnte (wie Körper, Flächen, Linien), deren Theile außerhalb und nebeneinander lie-

gen, und in intensive Größen, das Gegentheil der ersteren (wie Kraft, Licht, Wärme); zweytens die in stetige, deren Theile so zusammenhängen, daß das Aufhören (die Grenze) des einen Theiles zugleich der Anfang des folgenden Theiles ist (z. B. die geometrische Fläche, Linie, . . .), und in diskrete (abgesönderte) Größen, das Gegentheil der erstern (z. B. ein Haufe Sand- oder Weitzenkörner).

4. Die Wissenschaft der Größen (scientia quantorum) heißt Mathematik (μάθημα, μάθησις, Wissenschaft κατ' ἐξοχήν).

b. Haupteintheilung der Mathematik.

Die Mathematik wird eingetheilt in reine (mathesis pura) und angewandte Mathematik (mathesis applicata s. mixta); jene erwägt die Quanten in abstracto, d. i. abgesehen von wirklichen Gegenständen; diese beschäftigt sich unter zu Grundlegung der Lehren der reinen Mathematik und mit Benützung mannigfaltiger, theils empirischer, theils anderer scientifischer (z. B. ästhetischer), Kenntnisse mit wirklichen Gegenständen.

c. Unterabtheilung der reinen Mathematik.

Die reine Mathematik zerfällt in die allgemeine (mathesis generalis) und besondere (math. specialis). Jene erwägt die Quanten, als solche, und zugleich abgesehen von aller Qualität derselben; sie untersucht daher allgemein die möglichen Verknüpfungen der Einheit oder des Gleichartigen mit sich selbst, durch welche Quanten erzeugt werden und Quantität bestimmt werden kann. Dieser Theil muß daher als Fundament aller Mathematik betrachtet werden. Die reine besondere Größenlehre erwägt zwar auch die Quanten, als solche, aber sie hat nur Quanten von bestimmter oder gegebener Qualität zum Gegenstande.

Die allgemeinste mögliche Verknüpfungsart, wodurch Quanten erzeugt werden und Quantität bestimmt wird, ist die Addition mit ihrem Gegentheile der Subtraktion. Beyde gehören also mit den aus ihnen abzuleitenden Operationen zur reinen allgemeinen Größenlehre. Da aber die Arithmetik (ἀριθμος, numerus), als Wissenschaft der Zahlen und der gezählten Größen, jene Operationen insgesammt enthält: so kann man auch sagen, daß die Arithmetik, in wiefern sie Buchstabencalcul ist (man vergl. die nachfolgende besondere Einleitung), die reine allgemeine Größenlehre konstituire. Dagegen macht die Geometrie γεωμετρια, terrae mensura), als Wissenschaft des Raumes, oder als Wissenschaft von den Formen des Ausgedehnten, die reine besondere Größenlehre aus.

Durch Verbindung der Arithmetik mit Geometrie entsteht die Trigonometrie (τριγωνος μετρον, trianguli mensura), als Wissenschaft, aus 3 gegebenen Stücken eines Dreyecks die 3 andern, von jenen abhängigen, Stücke und den Flächenraum des Dreyecks selbst durch Rechnung zu bestimmen. Diese Wissenschaft, welche nach der Verschiedenheit der Dreyecke entweder ebene oder sphärische Trigonometrie ist, beruht bey ihrer möglichsten Ausbildung auf Goniometrie und Cyklometrie. Jene (dem Worte nach Winkelmessung) hat überhaupt die Vergleichung der Winkel mit den von ihnen abhängigen (trigonometrischen) Linien (wie Sinus, Tangente, . . .) zum Gegenstande, und stellt besonders die nützlichsten Formeln der trigonometrischen Funktionen der Winkel (eben jener trigonometrischen Linien) auf. Diese (dem Worte nach Kreis- oder Bogenmessung) untersucht das Verhalten der Kreisbogen zu den zugehörigen trigonometrischen Linien, und umgekehrt das Verhalten dieser zu jenen, und stellt dieses Verhalten durch Formeln dar; sie drückt z. B. den Sinus eines

Bogens in eben diesem, und umgekehrt, mittels einer Reihe aus.

In wiefern die einfachsten Sätze und Regeln, welchen gemäß das Gesuchte aus dem Gegebenen berechnet wird, auf ächt geometrische (synthetische) Weise durch Konstruktion bewiesen werden, gehört die Trigonometrie mehr der Geometrie, als der Arithmetik an.

d. Unterabtheilung der angewandten Mathematik.

1. Die angewandte oder praktische Arithmetik begreift überhaupt die sogenannte Rechenkunst, welche die allgemeinen arithmetischen Operationen auf die vorzüglichsten im bürgerlichen oder Geschäfts-Leben üblichsten und nützlichsten Rechnungsfälle anwendet; ins Besondere aber α) die merkantilische oder kaufmännische Rechenkunst mit der Wechselrechnung, (die sogenannte welsche Praktik liefert hiebey nur bequeme Abkürzungen); — β) die juristische und politische Rechenkunst (mathesis forensis). Jene betrifft die Anwendung der Arithmetik auf solche Fälle, bey welchen positive Gesetze zugleich Norm gebend sind, z. B. bey Vermögenstheilungen aus sehr verschiedenen Titeln; in Testaments-Sachen (Falcidienrechnung); bey Zins-, Termin- oder Ziel-Berechnungen (zusammengesetzte Zins- und Rabattrechnung), u. s. w. Zu dieser gehören die Berechnungen der Lebenden jedes Alters, der stehenden Ehen, der Wittwer und Wittwen, des Staatsvermögens mit Beziehung zugleich auf etwaige Staats-Schuldentilgung, der Zeitrenten und verschiedener Versorgungskassen.

2. Die angewandte Geometrie befaßt die Feldmeßkunst (Geodaesia — Δαιω, divido), und zwar theils die gemeine, theils die höhere (Vermessung ganzer Länder);

ferner das Nivelliren und die Markscheidekunst (geometria subterranea).

3. Die übrigen Theile der angewandten Mathematik pflegt man unter folgende vier Hauptwissenschaften zu bringen:

Erstens die mechanischen Wissenschaften,

deren Gegenstand überhaupt das Gleichgewicht und die Bewegung ist. Dahin gehören:

1) Statik (στατικη, sc. τεχνη, ars, quae ponderum rationem reddit), die Wissenschaft vom Gleichgewichte, — und Mechanik (μηχανικη — ars machinalis), als Wissenschaft von der Bewegung fester Körper; aber hinsichtlich unelastischer flüssiger Körper

2) Hydrostatik (ὑδροστατικη — von ὑδρος und στατικη) und Hydraulik (ὑδραυλικη — von ὑδωρ und αυλος, Wasserröhre oder Wasserleitung);

3) Aerometrie (αερομετρια — aeris mensura, auch Pneumatik) die Wissenschaft vom Gleichgewichte und der Bewegung der Luft, als einer elastischen Flüssigkeit.

Zweytens die optischen Wissenschaften.

Diese haben das Licht überhaupt zum Gegenstande, und befassen

1) die eigentliche Optik (ὀπτικη — ὀπτω, video), die Wissenschaft vom Lichte, das in gerader Linie ins Aug kömmt;

2) Katoptrik (von κατα, entgegen oder zurück), die Wissenschaft vom zurückgeworfenen Lichte, oder von den verschiedenen Arten der Spiegel;

3) die Dioptrik (von δια, durch), die Wissenschaft vom gebrochenen Lichte, oder von den optischen Gläsern, Fernröhren;

4) die Perspektiv, die Wissenschaft von der Zeichnung der Körper auf einer Fläche, wie sie uns in einer gegebenen Weite und Lage gegen unser Aug erscheinen;

5) die Photometrie und Pyrometrie, die Wissenschaft von der Stärke des Lichtes und des Feuers.

Drittens die astronomischen Wissenschaften.

Sie haben zum Gegenstande die Weltkörper überhaupt und die Zeitmessung. Zu denselben rechnet man gewöhnlich folgende Wissenschaften:

1) die eigentliche Astronomie (von ἀστηρ, Stern, und νόμος, Gesetz), die Wissenschaft von den Gesetzen der Sterne oder des Weltgebäudes überhaupt, und der dasselbe ausmachenden Welt- oder Himmels-Körper;

2) die Geographie (γεωγραφια — terrae descriptio), von der Figur und Größe der Erde, und der Bestimmung der Lage der Erdörter gegeneinander mit Hilfe astronomischer Beobachtungen;

3) die Chronologie (χρονολογια, temporis determinatio), von der Bestimmung der Zeit mittels der Astronomie, und von der Kalendereinrichtung;

4) Gnomonik (γνωμονικη — von γνωμον, stilus, horas indicans), als Wissenschaft, die Zeit mittels der Sonn-, Monds- und Sternuhren zu bestimmen.

Die unter den vorstehenden 3 Rubriken aufgeführten Theile der angewandten Mathematik bezeichnet man auch mit dem Namen der physisch-mathematischen Wissenschaften; bey ihnen haben die wenigsten empirischen Daten, und die meiste Anwendung der reinen Mathematik Statt.

Viertens die architektonischen Wissenschaften.

Diese haben überhaupt Bauunternehmungen zum Gegenstande. Zu ihnen gehört

1) die bürgerliche Baukunst (architectura civilis), die Wissenschaft von der Aufführung, Einrichtung und Verzierung aller jener Bauwerke, die man unter dem Namen der bürgerlichen Baulichkeiten zu befassen pflegt. Der Grund ihres Entstehens liegt nämlich theils in den mannigfaltigen unmittelbaren Bedürfnissen bürger-

licher Vereine, theils im Streben nach größerer Cultivirung des Bodens und nach höherem Wohlstande überhaupt, theils in der Erfüllung religiöser und politischer Zwecke, theils in der Befriedigung des Hanges zum Vergnügen und zum Luxus. Nach der angedeuteten Verschiedenheit der Zwecke hat der bürgerliche Baumeister für Festigkeit, Gesundheit, Bequemlichkeit, Schönheit und Pracht der Bauwerke zu sorgen. Mit Recht werden noch zur bürgerlichen Baukunst gerechnet

α) die Wasserbaukunst, Hydrotechnik (architectura hydraulica), als Wissenschaft von den Bauunternehmungen im Wasser, wie Deich-, Schleußen- und Brückenbau, Lenkung der Flüsse, Austrocknung der Sümpfe, Anlegung von Kanälen, Sicherung der Häfen, u. s. w;

β) die Schiffbaukunst (architectura navalis). Diese macht mit der Kunst, das Schiff zu regieren, welche, wie jene, besonders von der Mechanik unterstützt wird, — und mit der Kunst das Schiff zu leiten, oder der Steuermannskunst, die von der Astronomie abhängig ist, die Wissenschaften des Seewesens aus.

2) die Kriegsbaukunst, Fortifikation (architectura militaris). Man kann zu dieser auch die Wissenschaft vom Angriff und von der Vertheidigung einer Festung zählen, wozu denn vorzüglich die genaue Kenntniß von der Pyrotechnik oder Artillerie, als der Wissenschaft vom Geschütze und andern Werkzeugen des Angriffes und der Vertheidigung überhaupt, gehört. Der Mathematiker hat hiebey besonders das schwere Problem über den Weg der Bomben und Kanonenkugeln in der Luft, als einem beständigen Widerstand leistenden Mittel, aufzulösen. Uebrigens befaßt man die angeführten Wissenschaften, mit der Taktik zusammengenommen, unter dem Namen der Kriegswissenschaften.

Da die unter dieser 4. Rubrik aufgezählten Wissenschaften zugleich auch theils auf einer Menge Erfahrungs-

kenntnisse, theils auf Aesthetik beruhen: so werden sie mit Recht als technisch-mathematische von den physisch-mathematischen Wissenschaften unterschieden.

Die Tonkunst oder Musik hat zwar in mehr als einer Hinsicht die Mathematik zum Fundamente, doch wird sie in neueren Zeiten mit größerem Rechte in die Klasse der bildenden Künste gesetzt.

e. Nebeneintheilungen der Mathematik.

1. Die Mathematik stellt entweder bloß die Grundlehren (elementa) auf, oder sie setzt auf dem Grunde der Elemente ihre Untersuchungen über die Größen ins Unendliche fort; in der ersten Hinsicht heißt sie niedere (mathesis elementaris), in der andern Hinsicht höhere Mathematik (mathesis sublimior). Da aber die Sphäre bloßer Elemente weder an und für sich, d. i. durch die Natur des Gegenstandes selbst, noch durch die Uebereinkunft der Mathematiker genau bestimmt ist (besonders hinsichtlich der Arithmetik): so ermangelt diese Eintheilung der scharfen Begrenzung.

2. Sieht man auf die Beweisart: so kömmt man noch auf einen Theil der Mathematik, den man die Analysis nennt. Man kann nämlich die Sätze schon als bekannt oder erfunden an die Spitze stellen, und ihre Richtigkeit durch die Verbindung der ihnen zum Grunde liegenden einfacheren Sätze darthun; diese Beweisart heißt die synthetische, der man sich größtentheils in der niedern Mathematik bedient. Man beweist dagegen auf analytische Weise, wenn man durch den Beweis erst den Satz oder die mathematische Wahrheit aufzufinden sucht. Der Theil nun der reinen Mathematik, welcher sich dieser, besonders in der höhern Mathematik angewendeten, analytischen Beweisart bedient, wird Analysis genannt. Am allgemeinsten kann man diese auch

als die Lehre von den Formen oder Funktionen der Grö-ßen und ihren Umwandlungen definiren. Wie die Mathematik überhaupt, so wird auch die Analysis in die niedere und höhere (nach Kästner in „Analysis finitorum“ und „Anal. infinitorum“) eingetheilt. Zu jener gehört die niedere Algebra und das, was aus dieser in der niedern Geometrie und Trigonometrie hergeleitet wird; zu dieser die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalcalcul) und Alles, was durch diese in der höhern Geometrie und Trigonometrie gefunden wird.

In der neueren Zeit kam zu der Analysis ein neuer wichtiger Zweig unter dem Namen der combinatorischen Analysis, deren Erfinder Hindenburg ist.

B. Mathematische Methode und Terminologie.

a. Das Aeußere dieser Methode.

Der Mathematiker geht, nach Euklid's Beyspiele, von den Erklärungen oder Definitionen der zu betrachtenden Gegenstände aus. Von da geht er fort zu den Axiomen und Postulaten, welche ihm die obersten Grundsätze und sohin die Basis seiner Wissenschaft sind, so daß die nachfolgenden Wahrheiten, wieder aufwärts verfolgt, in diesen Grundsätzen den nothwendigen Halt- und Stützpunkt finden. Hierauf läßt er, mitunter nach vorausgeschickten Hypothesen, oder Lehnsätzen, die Lehrsätze und Aufgaben mit ihren Beweisen und Auflösungen folgen. Mehrere Wahrheiten, die als solche, durch ihren Zusammenhang mit dem unmittelbar Vorhergehenden leicht eingesehen werden, stellt er als Zusätze auf, und fügt da, wo er es für nützlich erachtet, Anmerkungen bey.

In der angewandten Mathematik beruft er sich nicht selten auf Erfahrungen, Experimente, Beobachtungen.

b. Erörterungen zur Terminologie.

1) Erklärung (definitio) ist die genaue und klare Bestimmung des vollständigen Begriffes eines Dinges. Sie ist genetisch, wenn sie zugleich angiebt, wie der Gegenstand möglich sey; sonst heißt sie Wort- oder theoretische Erklärung (defin. nominalis). Die meisten mathematischen Erklärungen, wenn sie nominal sind, können leicht in genetische umgewandelt werden; z. B. der Kreis ist eine ebene Figur, in welcher jeder Punkt des Umfanges von einem gewissen Punkte in der Figur gleichweit absteht; und genetisch: der Kreis ist eine Figur, welche beschrieben wird, indem eine gerade Linie in derselben Ebene sich um einen fixen Punkt umher bewegt.

2) Die mathematischen Sätze (Behauptungen, propositiones) sind entweder theoretische oder praktische, je nachdem sie entweder bestimmen, daß etwas so und so, oder nicht so sey; oder sagen, daß etwas geschehen könne oder solle. Sowohl der theoretische, als praktische Satz, der weder eines Beweises bedürftig, noch fähig ist, heißt an und für sich oder unmittelbar klar (per se evidens), und ist, als theoretischer Satz, ein Axiom (Grundsatz), oder, als praktischer Satz, ein Postulat (Forderungssatz). Den unmittelbar klaren Sätzen gegenüber stehen der Lehrsatz (theorema), als theoretischer, — und die Aufgabe (problema), als praktischer Satz, welche bewiesen werden können und müssen. Die Bestimmung der Art, wie der Aufgabe Genüge geschehe, heißt ihre Auflösung (solutio). — Ein Satz, welcher aus der Definition, oder einem der genannten Sätze unmittelbar oder durch einen leichten Schluß als wahr abgeleitet wird, heißt Zusatz (corollarium). — Hypothese (willkührliche Annahme) ist ein Satz, der, weil er in sich widerspruchsfrey ist, und keiner andern Wahrheit widerstreitet, ohne weitere

Rechtfertigung als Statt findend angenommen wird; z. B. die willkürliche Eintheilung der Kreislinie.

Lehnsatz (lemma) ist ein zum Behufe der Darstellung mathematischer Wahrheiten aufgenommener Satz, der entweder an einer späteren Stelle des Gebietes der Mathematik selbst, oder in einer nicht zu diesem Gebiete gehörigen Wissenschaft bewiesen ist. In ersterem Falle ist nur dann die Aufnahme eines Satzes, als Lemma's, gültig, wenn der Mathematiker dabey nicht den Fehler begeht, welchen der Logiker „vitium probationis in circulo“ nennt. Die hiedurch bedingte Behutsamkeit und der Umstand, daß im zweyten Falle der zu entlehnende Satz keinem Zweifel unterworfen seyn dürfe, bewirkt die Seltenheit der Lehnsätze im Gebiete der Mathematik.

Die Anmerkungen oder Scholien, als nicht wesentlich zur Wissenschaft gehörige Sätze, betreffen entweder die weitere Erörterung des richtigen Sinnes einer aufgestellten Wahrheit, um sie gegen Zweifel und Mißverständnisse sicher zu stellen, oder ihre Anwendung und das Geschichtliche, z. B. die Erfindung und deren Nutzen, u. d. gl.

3) Der mathematische Beweis (demonstratio) ist die Darstellung der nothwendigen Verknüpfung des Subjekts mit dem Prädikate des Satzes, diese mögen nun einzelne Erkenntnisse, deren eine von der andern bejaht oder verneint wird, oder selbst wieder Sätze seyn, wie z. B. bey dem hypothetischen Satze. Zeigt jene Darstellung die Richtigkeit des Satzes geradezu, so heißt sie ein direkter Beweis: zeigt sie aber dieselbe aus der Unmöglichkeit des Gegentheils: so heißt sie ein indirekter (demonstratio ex absurdo), oder apagogischer Beweis (ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον). Inwiefern jener, wie dieser, die beabsichtigte Evidenz gewähren, sind sie beyde dem Mathematiker von gleichem Werthe.

c. Das Wesentliche der mathematischen Methode.

Diese besteht darin, daß erstens die Begriffe der mathematischen Gegenstände von aller Erfahrung unabhängig für die reine Einbildungskraft fest stehen, indem der Mathematiker sie konstruiren, oder sie zugleich mit ihren Gegenständen in der reinen Einbildungskraft darstellen kann. Hiedurch ist denn jedem Begriffe seine objektive Realität gesichert, und der Mathematiker weiß, daß, in wiefern er aus denselben folgert, oder auf ihrem Grunde im wissenschaftlichen System vorwärts schreitet, er sich nicht in ein leeres Spiel der Phantasie verlieren könne. Eben so vermag der Mathematiker zweytens bey jedem zu beweisenden Satze die nothwendige Verknüpfung des Subjekts mit dem Prädikate zugleich mit dem Gegenstande selbst in der reinen Einbildungskraft darzustellen. Dadurch werden die Beweise wahre Vorzeigungen des zu Beweisenden, d. i. Demonstrationen. Diese gewähren daher eine nicht bloß logische, sondern zugleich anschauliche Gewißheit, d. i. Evidenz, welcher sich nur die Mathematik, als Wissenschaft der Größen, zu erfreuen hat, indem nur diese sich in der reinen Einbildungskraft darstellen lassen. Mag folglich auch der Erfinder oder Ordner irgend eines andern wissenschaftlichen Systems das Aeußere der mathematischen Methode noch so vollkommen nachbilden (wie der Philosoph und Mathematiker Wolf versuchte); Evidenz vermag er ihm hiedurch nicht zu geben. Inwiefern übrigens auch in der Mathematik die Denkfunktionen nothwendig in Anwendung kommen, müssen die Gesetze des Denkens, wie in jeder andern Wissenschaft, befolgt werden. Es kann daher die Logik keine höhere Verdienste um die Mathematik in Anspruch nehmen, als die sind, welche sie um jedes andere wissenschaftliche Gebäude hat.

Man nennt die erörterte Methode auch die strenge oder Euklid'sche, nach welcher einzig das Studium der Mathematik zu betreiben ist dem bekannten Spruche gemäß „ad Mathesin non datur via regia."

C. Nutzen der Mathematik.

Wer hiebey an die Vortheile denken will, welche die Mathematik theils andern Wissenschaften bringt, theils unmittelbar ins bürgerliche Leben und Walten hereinträgt: der darf nur mit reflektirendem Sinne die oben angeführten zwey großen Klassen der physisch- und technisch-mathematischen Wissenschafften beachten, um sich zu überzeugen, daß die Mathematik nicht nur fast alle unsere Forschungen mächtig unterstütze, und das System der gewonnenen Resultate zur Wissenschaft möglichst steigern helfe: sondern daß sie auch überall helfend und sichernd eingreife, wo es auf die Befriedigung unserer wichtigsten Bedürfnisse, auf die Bequemlichkeiten und Annehmlichkeiten des menschlichen Lebens ankömmt. So, um nur das Eine ausdrücklich zu sagen, ist ohne reine Mathematik keine Astronomie; ohne diese ermangelte die angewandte Mathematik nicht nur ihrer Krone, sondern es wäre auch keine genaue Zeitmessung und keine Chronologie, sohin auch keine Geschichte möglich. Ohne Astronomie ferner keine Geographie, keine Weltumseglung und überhaupt fast keine Schiffahrt, und ohne diese sogut, als keine Länder- und Völkerkunde! Höchst beschränkt wäre dann die Kenntniß des Naturforschers von den drey Reichen der Natur; einseitig nur sein Urtheil. Und ins Besondere könnte ihm vom großen Ganzen des dann in einzelne, ewig gleichsam voneinander geschiedene, Gruppen zersplitterten Menschengeschlechtes mehr noch, als eine schwache Ahndung übrig bleiben? Dagegen ist nun, nachdem sowohl einiger Maßen das Innere, als

der bey weitem größere Theil der Oberfläche der Erde, als einer im Weltraume frey schwebenden Kugel, mit Hilfe der mathematischen Wissenschaften zugänglich geworden ist, dem Vereine der Naturforscher eine reiche, nie versiegende Quelle neuer Entdeckungen geöffnet. Nirgends also die Menschheit tödtender Stillstand!

Allein auch abgesehen von den relativ-zufälligen Vortheilen, welche dem Menschengeschlechte durch die mathematischen Wissenschaften zufließen, haben diese einen Werth von wesentlicher und höherer Bedeutung in sich. Denn ihr ernstes Studium trägt am meisten zur Bildung des ganzen Menschen bey. In wissenschaftlicher Hinsicht übt und kräftigt dieses Studium die Urtheils- und Erfindungskraft, das Schließ- und Abstraktionsvermögen und die progenirende Einbildungskraft im hohen Grade. Hiedurch wird der Liebhaber der Mathematik in den Stand gesetzt, nicht nur sich bestimmt, kurz und richtig auszudrücken, das Dargebotne einer strengen Kritik zu unterwerfen, und jeder andern Wissenschaft sich mit Leichtigkeit zu bemeistern*), sondern zum Allgemeinen auch und zu Ideen sich zu erheben, als worin das eigentliche Leben des menschlichen Geistes besteht.

In sittlicher Hinsicht gewährt das Studium der Mathematik das reinste Vergnügen, indem es, als Streben, sich der mathematischen Wahrheiten als Eigenthumes nach der strengen Methode zu bemächtigen, keineswegs Werk des Gedächtnisses, sondern der Erfindung, oder ein wahres Nacherfinden ist. Eben hiedurch wird in dem Liebhaber der Mathematik das erhebende Gefühl rege, vom Einflusse der Aussendinge unabhängig Selbst-

---

*) Diogenes Laert. erzählt vom Xenocrates, daß dieser einen in der Mathematik Unbewanderten von der Theilnahme an seinem Unterrichte weggewiesen habe mit den Worten: »ansas philosophiae non habes.« Aehnliches ist von Plato bekannt.

schöpfer und Träger einer ideal-realsten Welt zu seyn, welche ihr Nachbild hat in der uns umgebenden Wirklichkeit, so daß diese nur durch jene gedeutet und bestimmt werden kann. Dieses Gefühl, verbunden mit dem klaren Bewußtwerden höheren Seyns und höherer Bestimmung, erzeugt jenen edlen Stolz, der, den Leichtsinn abwehrend, schützend wirkt gegen die Thorheiten, in welchen das bessere Ich gleichsam untergeht. Hiezu kömmt, daß das Studium der Mathematik, als einer Wissenschaft, welche lauter Wahrheiten mit Evidenz enthält, die Wahrheitsliebe erregt und befestiget, ohne welche das erhabene Bild der Tugend seines ersten Grundzuges ermangelt, und der Mensch als charakterlos erscheint.

II.

Besondere Einleitung.

§. 1. Zu den willkührlich angenommenen arithmetischen Zeichen (Z. §. 8. E.*) gehören auch die Buchstaben des lateinischen Alphabets. Durch die Anfangsbuchstaben a, b, c ... werden die bekannten, durch die Endbuchstaben aber u, w, x, y, z die unbekannten Größen bezeichnet.

Die Rechnung mittels dieser Buchstaben heißt die Buchstabenrechnung oder der Buchstabencalcul (vergl. Z. §. 9. E.).

Ziffern und Buchstaben kommen darin überein, daß beyde die Qualität der Einheit (Z. §. 25. E.) unbestimmt lassen, folglich in so fern allgemeine Zeichen für die Zahlen sind, die wir bey jeder Größe, in Ansehung welcher der Akt des Zählens gebraucht wird, anwenden können.

Daß aber die Buchstaben sowohl für sich, als in ihrer mannigfaltigen Verbindung, allgemeinere Zeichen sind, als die Ziffern, leuchtet schon ein, sobald man erwägt, daß die Ziffern eine bestimmte Menge von

---

*) Durch Z. wird die zweyte durchaus umgearbeitete, verbesserte und vermehrte Ausgabe meiner Zifferrechnung oder vollständigen Lehrbuches der Rechenkunst (Bamb. u. Würzb. 1815), und durch E. die Einleitung zu diesem Buche citirt.

Einheiten ausdrücken, der Buchstabe aber jede mögliche Zahl bedeuten kann. Hieraus entspringen zwey wesentliche

Vorzüge des Buchstabencalculs vor dem Zifferncalcul.

§. 2. A. Wegen der größeren Allgemeinheit ihrer Zeichen hat auch die Buchstabenrechnung größere Allgemeinheit, als die Ziffernrechnung, so zwar, daß diese letztere durch jene durchaus begründet, und in ihrer vollständigen Anwendung gesichert wird. Die Ziffernrechnung verhält sich also zur Buchstabenrechnung, wie die Folge zum Grunde, oder wie die Praxis zur Theorie. Das, was von der Ziffernrechnung durch den Buchstabencalcul nicht mitgegeben werden kann, ist die leichte Handhabung der erstern. Diese erfodert nämlich die empirische Kenntniß der Ziffern, der willkührlichen Bestimmung ihres Werthes in der Zusammensetzung und der daraus resultirenden Regeln, auf eine kurze Weise die gesuchte Zahl zu finden. Die Ziffernrechnung kann daher nur in so fern in sich gewiß oder begründet seyn, als sie die Beweise für die Richtigkeit ihrer Operationen aus der Natur der Sache selbst nimmt. Aber eben diese Natur mit den aus ihr genommenen Beweisen in ihrer Anschaulichkeit und Allgemeinheit — das Höhere, was die Ziffernrechnung für sich gleichsam nur ahnen läßt, den denkenden Kopf zur ernsten Nachforschung über dasselbe spornend — darzustellen, und durch eine arithmetische Formel zu fixiren, ist dem Zifferncalcul wegen der niedern Allgemeinheit seiner Zeichen nicht möglich.

§. 3. B. Das Gesagte führt zu einem zweyten Vorzuge der Buchstabenrechnung, welchen ihr die ihr eigenthümlichen Formeln vor der Ziffernrechnung erwerben.

Diese Formeln sind nichts anders, als allgemeine anschauliche Ausdrücke irgend einer mathematischen Wahr-

heit, diese mag nun unmittelbar die Natur des Gegenstandes selbst angehen, oder in entfernterer Beziehung auf dieselbe, als Resultat, stehen, d. h. es mögen ursprüngliche oder abgeleitete Formeln seyn. An diesen Formeln hat der Mathematiker sichere und bleibende Normen, nach welchen sich jeder einzelne Fall, jede bestimmte Rechnung vermöge der Substitution richten muß. Wer diese Formeln lediglich für die Praxis kennt, unterscheidet sich, als bloßer Rechner, von dem Mathematiker, der, weil er ihre Deduktionen inne hat, sie auch durch allgemeine Sätze auszudrücken vermag.

Weitere Vergleichung der Buchstabenrechnung mit dem Zifferncalcul in Ansehung ihrer Sphäre.

§. 4. Die Buchstabenrechnung leitet ferner erstens dadurch eine größere Erweiterung ihrer Sphäre, als die Ziffernrechnung, daß der Mathematiker bey dem Buchstaben nicht gerade immer an irgend eine Zahl denken muß, sondern daß ihm der Buchstabe eine Größe überhaupt bezeichnet. Sagt z. B. der Mathematiker „wenn a und b ungleich sind: so ist a entweder größer oder kleiner als b“: so will er diesen Satz nicht bloß für Zahlen, sondern auch als für jede mathematische Größe, wenn z. B. a und b Linien bedeuten, geltend aussprechen.

§. 5. Zweytens. Durch die Einführung der entgegengesetzten Größen in die Buchstabenrechnung erhalten die dahin gehörigen Rechnungsarten ihre vollkommene Allgemeinheit. Die gemeine Rechenkunst, zum Gebrauche im bürgerlichen Leben bearbeitet, bedarf dieser entgegengesetzten Größen nicht. Denn da, wo sie im bürgerlichen Leben vorkommen, z. B. wenn die Rede von der Beziehung der Schulden auf das Vermögen eines Mannes ist, weiß der gemeine Menschenverstand von selbst, daß

hier die kleinere Zahl von der größeren abgezogen werden, und der Rest den Namen der größeren Zahl erhalten müsse.

Für den gemeinen Menschenverstand haben übrigens Ausdrücke, wie 2—3, gar keinen Sinn, weil man das Größere vom Kleinern nicht abziehen kann. Allein nach Festsetzung des wahren Begriffes von Entgegensetzung zweyer Größen hat in dem Buchstabencalcul a—b immer einen richtigen Sinn.

§. 6. Dieser Ausdruck sagt nicht mehr und nicht weniger, als: nimmt man eine dieser Größen mit der ihr entgegengesetzten zusammen: so destruirt diese jene entweder ganz, oder einen der entgegengesetzten Größe gleichen Theil. Ist daher a kleiner als b: so wird durch die der Größe b entgegengesetzte Größe a nur ein solcher Theil von b destruirt, welcher eben dieser Größe a gleich ist. Hieraus ist von selbst klar, daß der Rest d mit der Bestimmung, die man dem ganzen b vorher beygelegt hatte, d. i. hier —d gesetzt werden muß.

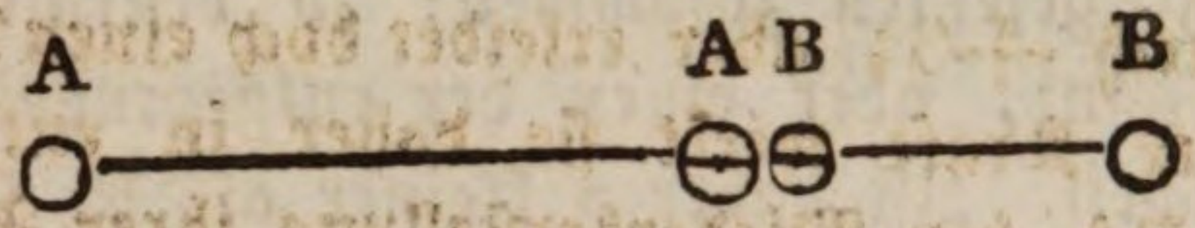
Weil ferner die Entgegensetzung eine bloße Verhältnißvorstellung ist, folglich sowohl —d, als +d, nur in Verbindung mit einer Größe gedacht werden kann: so erhellt auch, daß —d dann soviel aussagt, als 0—d (=0+(—d)).

§. 7. Daß hier Null, oder Nichts, als das Verneinende aller wirklichen Größe, selbst die Stelle einer wirklichen Größe vertritt, ist eben so wenig Unsinn, als eine vollständige Nullenrechnung. Es liegt dieß vielmehr selbst in der Natur der vollendeten Allgemeinheit des Buchstabencalculs, welcher das Verhältniß einer wirklichen Größe zur Null schlechterdings nicht abweisen kann.

Sieht man nicht auf die Art, wie der Ausdruck 0—d entsteht: so ist sowohl —d für sich, als 0—d, ein sinnloser Ausdruck. Denn jede Größe sagt an und für

sich etwas Wirkliches, etwas Bejahendes aus, daher eine mit dem Zeichen der Subtraktion gesetzte Größe, wie das Abziehen der Größe von Null, keinen Sinn hat. Setzt man aber statt 0 den Ausdruck (a—a), folglich statt —d oder (0—d) den Ausdruck +a+ (—a—d): so zeigt sich sogleich, daß —d die wirkliche Größe bedeute, welche noch übrig bleibt, nachdem die zur ganzen Größe —b gehörige Größe —a durch eine ihr entgegengesetzte gleiche Größe +a destruirt ist.

§. 8. Wir wollen zur Erläuterung des Ganzen vorerst folgendes Beyspiel anführen:



Es sollen sich die vollkommen elastischen Kugeln A, B von gleicher Masse, A mit der Geschwindigkeit =10 und B mit der Geschwindigkeit =6, gegeneinander bewegen. Beyde Geschwindigkeiten, entweder als solche, oder bey dem Zusammenstoßen der Kugeln wie Kräfte, mit welchen sie aufeinander wirken, betrachtet, sind offenbar gleich reelle oder positive Größen. Allein inwiefern man beyde Kräfte im Konflikte, welcher an den in gerader Linie, aber in entgegengesetzten Richtungen, bewegten Kugeln Statt findet, bezeichnen will: muß man die Geschwindigkeit oder Kraft von A in der Richtung AB durch —, und die von B in der Richtung BA durch +, oder umgekehrt, bezeichnen.

Stoßen nun beyde Kugeln central zusammen: so ist offenbar, daß A auf B, um diese Kugel fortzustoßen, in der Richtung AB nur mit einem Theile ihrer Kraft =—4 wirken kann, weil —6 verbunden mit +6 (die Geschwindigkeit der andern Kugel B) =0 ist. Eben deßwegen kann auch die Kugel B die andere A nicht nach der Richtung BA mit der Kraft +6 fortstoßen, sondern nur zusammendrücken. Indem nun A ihre dadurch ab-

geänderte Figur wieder herzustellen strebt, wirkt sie auf B wieder mit derselben Quantität von Kraft zurücke: B muß also nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit $=-4+(-6)=-10$, folglich in der Richtung AB fortgehen.

Durch jene Stoßkraft $=-4$ wurde die Kugel B zusammengedrückt. Diese wirkte daher nach der Richtung BA auf A bey Wiederherstellung ihrer Figur mit gleicher Kraft zurücke, folglich $-4+4=0$, d. i. auch dieser Theil der Geschwindigkeit von A gieng für A verloren. Nun wird zwar auch B von dem andern Theile der Kraft ($=-10$), nämlich -6, nicht fortgestoßen, wie A nicht von B durch $+6$; aber erleidet doch einen Druck $=-6$. Mit dieser Kraft wirkt sie daher in entgegengesetzter Richtung BA bey Wiederherstellung ihrer Figur auf die Kugel A; diese muß folglich mit der Geschwindigkeit $=+6$ nach dem Stoße fortgehen.

So erhellt deutlich, daß beyde Kugeln nach dem Stoße mit verwechselten Geschwindigkeiten von einander abspringen, oder daß jede Kugel nach einer Richtung, welche ihrer ersten Richtung entgegengesetzt ist, mit Verwechslung ihrer Geschwindigkeit nach dem Stoße fortgeht.

§. 9. Aus diesem Beyspiele sehen wir 1), daß -10 in Verbindung mit $+6$ einen deutlichen Sinn giebt; 2) daß aber eine mit dem Zeichen der Subtraktion für sich gesetzte Größe, wie -10, wenn man sie nicht mit Null in Verbindung bringt, keinen Sinn hat. So zeigt der Ausdruck $0-10$ für die Geschwindigkeit von B nach dem Stoße an, daß ihre Geschwindigkeit erst von einer entgegengesetzten müsse aufgehoben worden seyn, bevor die Geschwindigkeit -10 entstehen, oder bevor die vorige Geschwindigkeit in eine andere $=10$, aber nach einer gerade entgegengesetzten Richtung verwandelt werden konnte. Da dieß derselbe Fall in Ansehung der Geschwindigkeit

der Kugel A nach dem Stoße ist, so mußte auch diese, auch ohne Beziehung auf die von B, oder auf die entgegengesetzte Richtung beyder Kugeln gedacht, durch 0+6 bezeichnet werden.

3) Sieht man ein, daß hier nicht eine Größe mit Nichts überhaupt verglichen wird, sondern mit einem Nichts, dessen bestimmter Werth entweder +6—6 oder —10 +10 ist, daß folglich in Beziehung auf diesen bestimmten Werth der Ausdruck 0—10 wirklich eine Größe andeutet, die kleiner als Nichts ist (quantitas nihilo minor), wo nämlich 0 nicht das absolute, sondern irgend ein relatives Nichts bezeichnet.

§. 10. Der Mathematiker bezeichnet also mit Recht jede Größe, die er sich nur dadurch entstanden denkt, daß sie durch Null oder den Vernichtungspunkt durchgieng, und nun irgend eine Bestimmung erhalten hat, welche ihrer vorigen entgegengesetzt ist, durch das Zeichen der Subtraktion, indem man derselben Größe vor diesem Durchgange durch den Nullpunkt das Zeichen der Addition vorsetzt; und umgekehrt.

Dieselbe Wahrheit geht aus der Natur folgender Reihe hervor, die man durch Subtraktion der Einheit erhält:

. . . 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3, . . .

Diese Reihe rückwärts gelesen, hat man eben so:

. . . —3, —2, —1, 0, +1, +2, +3, . . .

Hieraus erhellt, daß man nur über den Null- oder Vernichtungspunkt hinaus dieselben Glieder nun im Subtraktions- oder im Additions-Sinne, oder allgemein mit entgegengesetzter Bestimmung erhalte. Dasselbe schauen wir auch in der Reihe

. . . 7, 4, 1, —2, —5, —8 . . .

indem —2 für (0—2) steht.

Beyspiel für schon Geübtere (von Anfängern ganz zu überschlagen). Wenn mehrere veränderliche

Größen A, B, C, . . . auf dieselbe unveränderliche Größe (Grundgröße =r) so bezogen werden, daß sie durch letztere ihre Bedeutung und Bestimmbarkeit erhalten: so bilden sie ein System. Solches ist der Fall mit den trigonometrischen Linien, welche auf den, den Kreis progenerirenden Halbmesser, als unveränderliche Größe, bezogen werden. Diese zu einem System gehörigen Größen, als veränderliche, folglich der wechselweisen Zu- und Abnahme fähige Größen, können von der Einbildungskraft entweder als solche aufgefaßt werden, die bey ihrer stufenweisen Zunahme endlich bleiben, d. i. nur ein endliches Größtes (maximum finitum) erreichen, oder als solche, welche unendlich (über alle Grenzen) wachsen.

In dem ersten Hauptfalle ist das erreichte Maximum entweder gleich der Grundgröße r, oder ein endliches Vielfaches derselben. In jenem Falle kann man sich die veränderlichen Größen entweder von Null, als Minimum, ausgehend und von da an zuerst wachsend, oder vom Maximum r ausgehend und von da zuerst abnehmend denken. Die Größe nun, die vom Minimum =0 ausgeht, und das Maximum r erreicht, wird in ihrem Wachsen und Abnehmen durch die Reihe

(I) 0, 1, 2, 3, . . . (r−1), r, | −(r−1), . . . 3, 2, 1, 0 (=r−r) | −1, −2, . . . −r | (−r+1), (−r+2), . . . −2, −1, 0 (=−r+r) | +1, +2, ... +r | . . . . (So für Sinus.)

dargestellt werden. Geht aber eine jener Größen A, B, C, . . . von x aus, so wird für sie die Reihe gelten

(II) r, (r−1), . . . 3, 2, 1, 0 (=r−r) | −1, −2, . . . −r | − (r−1) . . . −2, −1, 0 (=− (r−r) | +1, +2, . . . +r | . . . . (So für Cosinus.)

Man sieht, daß sich beyde betrachtete Größen in ihren Zu- und Abnahmen zwischen den Grenzen 0 und x hal-

ten; daß sich das Maximum r in Verbindung mit —r destruire, und daß nun die über den Zernichtungspunkt hinaus wiederkehrenden, gleich reellen, Größen den Charakter der Entgegensetzung nothwendig annehmen.

Sind ferner unter den Größen A, B, C, ... solche, die sich in ihren Veränderungen zwischen 0 und 2r halten: so bekömmt man für die Veränderungen derjenigen Größe, die von 0 ausgeht, durch die Verbindung der Reihe (II) mit r die folgende Reihe

(III) r—r (=0), . . . r —(3), r —(2), r —(1), r—0 (=r) | r —(—1), r —(—2), . . . r —(—r) (=2r) | . . . r —(—2), r —(—1), r | r—(1), r —(2), . . . (So für Quersinus.)

Hier findet also nur eine Zunahme bis zum Maximum 2r, und von da eine Abnahme bis wieder zu 0, daher kein Zernichtungspunkt, folglich auch keine Entgegensetzung der veränderten Größen Statt.

Geht aber die Größe von r aus, so kann man ihre Veränderungen durch folgende Reihe darstellen, die man erhält, wenn man mit r, wie vorhin, die Reihe (I) verbindet:

(IV) r—(0), r—(1), r—(2) . . . r—(r) (=0) | . . . r—(3), r—(2), r—(1), r | r—(—1), r—(—2) . . . r—(—r) (=2r | . . . r—(—3), r—(—2), r—(—1), r | . . . (So für Quercosinus.)

Liest man diese Reihe von 0 an rückwärts, so erhellt, daß man, wie bey der vorigen Reihe, nur ein Wachsen der Größe bis zum Maximum 2r, und von da an ein Abnehmen bis wieder zu 0 habe. Hieraus ist denn klar, daß das in (IV) vorkommende 0 nur die Stelle eines bloßen Minimums (als eines der Anfangs- oder Endpunkte der Veränderungen) vertrete, keineswegs aber eine Destruktion, wie 2r—2r, d. i. keine Destruktion bezeichne, wie solche in (I) und (II) für das Maximum

r (in r—r) Statt fand, daß folglich auch keine Entgegensetzung in dieser Reihe zum Vorschein kommen konnte.

Wenn im zweyten Hauptfalle sich unter den Größen A, B, C, . . . solche finden, die über alle Grenzen wachsen, deren wechselweise Veränderungen also zwischen 0 oder r und dem Unendlichgroßen (∞) befangen sind: so kann man, wie oben, diese Veränderungen entweder von 0, oder von r, oder von ∞ ausgehend denken. Wir wollen nur noch den ersten und letzten Fall betrachten. Stellt man sich nämlich die Veränderungen einer über alle Grenzen wachsenden Größe von 0 anfangend vor: so werden sie durch folgende Reihe dargestellt, die man durch die Verbindung der Reihe (I) mit (II) erhält:

$$(V)\ \frac{0}{r}(=0), \ldots \frac{r-1}{1}, \frac{r}{0}(=\infty)\left|\frac{r-1}{-1}\right.(=-\frac{r-1}{1}), \ldots \frac{0}{-r}(=0)\left|\frac{-1}{-(r-1)}\right.(=+\frac{1}{r-1}), \ldots \frac{-r}{0}(=\infty)\left|\frac{-(r+1)}{+1}\right.(=-\frac{r+1}{1}), \ldots$$

(So für Tangente.)

Wenn man jene 2 Reihen durch Division der Glieder der zweyten durch die der ersten Reihe miteinander verbindet: so stellt die resultirende Reihe die Veränderungen einer Größe, die von ∞ ausgehen, vor. (So für Cotangente.) In beyden Fällen sehen wir, wie Größen, die bey ihren Aenderungen durch ∞ gehen, gerade so nothwendig den Charakter der Entgegensetzung annehmen, als wenn sie durch den Null- oder Zernichtungspunkt durchgehen. In der That vermag die Einbildungskraft den Uebergang der Größeänderungen vom Unendlichen zum wiederkehrenden Endlichen sich nur so als möglich vorzustellen, daß die Größe selbst beym Auf-

hören des Zustandes der unendlichen Vermehrung unter dem Symbol ($\infty r - \infty r$) zernichtet werde.

§. 11. Aus beyden Beyspielen (§§. 10. 8.) erhellt, daß man sich den Anfang der eigentlichen Entgegensetzung zweyer Größen in der gemeinschaftlichen Zernichtungsgrenze selbst denken müsse, und daß sich der Mathematiker auf gänzlich gleiche Weise weder das Zeichen +, vor irgend einer Größe gesetzt, weder das Zeichen — erklären könne, wenn er sich nicht diese wie jene Größe durch Null gegangen denkt.

Folgendes mag noch zur Bestättigung des Gesagten ebenfalls für den schon Geübteren dienen: In der Trigonometrie deduziren wir aus der Hauptformel $\text{tang. } \alpha = \frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha}$, den Halbmesser $=1$ gesetzt, daß die Tangente im 1t. und 3t. Quadranten positiv, im 2t. und 4t. negativ (wie man sich kurz ausdrückt) sey *). Die ganze Formel ist aber $\frac{\text{r. Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha} = \text{tang. } \alpha$. Wollte man nun den Halbmesser im 1t. Quadr. durch + und den im 3ten durch — bloß wegen ihrer entgegengesetzten Lage bezeichnen: so hätte man für den dritten Quadranten $\frac{-\text{r.} - \text{Sin. } \alpha}{-\text{Cos. } \alpha} = -\text{tang. } \alpha$. u. s. w. Allein da alle Halbmesser als ein und derselbe generirende Halbmesser können betrachtet werden: so kann man nirgends einen Nullpunkt für den Halbmesser angeben, durch den er gegangen, eine ganz entgegengesetzte Lage annähme; d. i. es ist widersinnig, den einen Halbmesser durch + und den andern durch — zu bezeichnen.

§. 12. Aus der bisherigen Entwickelung des Begriffes der entgegengesetzten Größen ist klar: 1) daß

*) S. Seite 28—30 meiner Trigon.

keine Größe an und für sich durch +a oder a— bezeichnet werden könne, sondern daß diese Zeichen, vor den Größen gesetzt, nur in Verbindung der Größen untereinander oder in Verbindung mit 0 gedacht, einen deutlichen Sinn geben. Dadurch erhält sich der Begriff von Entgegensetzung als Verhältnißbegriff und die Zeichen selbst behalten stets ihre ursprüngliche Bedeutung der Addition und Subtraktion.

Man sieht 2) deutlich, daß die Entgegensetzung der Größen nicht von den Größen selbst, als solchen, sondern nur von gewissen Bedingungen, Attributen, der Größen in Verbindug eben dieser Größen abhängt. Daher ist es öfters lediglich willkührlich, welche von 2 Größen der Mathematiker mit +, welche er mit — bezeichnen wolle.

3) Verbindet man zwey entgegengesetzte Größen: so ist offenbar, daß man im Allgemeinen nicht ausschließend der einen Größe das Vermögen leihen könne, die andere zu vermindern oder zu zernichten; sondern daß dieses Vermögen der einen wie der andern Größe, folglich beyden in ihrer Verbindung wechselseitig zukommen müsse. So vermindern 4 fl. Vermögen addirt zu 6 fl. Schulden, diese um eben so viel und auf dieselbe Art, um wie viel und auf welche Art 6 fl. Schulden zu 4 fl. Vermögen addirt, diese vermindern.

Wer einen Weg von 3 Meilen hinwärts und 3 Meilen wieder gerade rückwärts macht, findet sich nach Verlauf der Zeit, innerhalb welcher er 6 Meilen zurücklegte, an dem Orte, von dem er ausgieng. Hier ist nämlich wieder (+3)+(—3) =3—3=0.

Die Natur der Addition entgegengesetzter Größen verwandelt sich also in die der Subtraktion überhaupt.

Hebt man aber die entgegengesetzte Bestimmung des einen durchlaufenen Raumes z. B. das „gerade Rückwärtsgehen“ auf: so findet sich der Reisende nach

Verlauf derselben Zeit 6 Meilen von dem Ausgangsorte ent ernt; d. i. in diesem Falle ist $(+3)-(-3)=(+3)+(+3)=6$, oder das Aufheben einer entgegengesetzten Bestimmung einer Größe in Verbindung mit einer andern ist nichts anders, als das Abziehen einer entgegengesetzten Größe von einer andern. Also verwandelt sich die Natur der Subtraktion entgegengesetzter Größen in die der Addition überhaupt.

§. 13. In Ansehung entgegengesetzter Größen gelten also bestimmt folgende Grundsätze:

I. Man addirt zu einer Größe eine ihr entgegengesetzte, wenn man die der letztern Größe entgegengesetzte Größe von ihr subtrahirt.

Formel. $(\pm a)+(\mp b)=(\pm a)-(\pm b)$.

Hieraus ist klar, daß $+-$, wie $-+$, eben das sey, was $-$ ist.

II. Man subtrahirt von einer Größe eine ihr entgegengesetzte, wenn man die der letztern entgegengesetzte Größe zur erstern addirt.

Formel. $(\pm a)-(\mp b)=(\pm a)+(\pm b)$.

Hieraus erhellt, daß $--$, wie $++$, eben das sey, was $+$ ist.

Man pflegt sonst diese Grundsätze so auszudrücken: „Addere negativum idem est subtrahere positivum“ et „subtrahere negativum idem est addere positivum.“ Nachdem wir den wahren Sinn von Entgegensetzung zweyer Größen festgesetzt haben: so können wir uns immerhin dieser kurzen Sprache der älteren Mathematiker bedienen, ohne befürchten zu müssen, man möge uns vorwerfen, wir führten Irrthum oder Unsinn in die Mathematik ein. Da einmal die Mathematiker darin

übereingekommen waren, einseitig, wenn ich so sagen soll, nur gewisse Größen den andern entgegengesetzt zu betrachten, und diese Größen immer mit dem Zeichen — zu bezeichnen, z. B. Schulden, die Cosinusse des 2ten und 3ten Quadranten u. s. w.; so konnte sich nach und nach der Vergleichungsbegriff aus dem Begriffe der Entgegensetzung der Größen verwischen, und jene beständig mit + bezeichneten Größen in Verbindung mit den beständig mit — bezeichneten konnten als ihrer Natur nach positive und diese als negative Größen an und für sich angesehen werden. Bey jeder Größe, die ohne + oder — gesetzt ist, wird übrigens lediglich das Zeichen + verstanden.

§. 14. Des Zusammenhanges und leichteren Verstehens wegen leiten wir hier die Richtigkeit des Verfahrens in Ansehung der Zeichen bey der Multiplikation und Division aus den vorhergehenden Grundsätzen (§. 13.) ab.

Ich setze hier als bekannt voraus, daß der Ausdruck ab das Produkt aus a. b bezeichne, und daß ab gleich ba, ferner daß das Multipliziren ein wiederholtes Addiren (nämlich nach dem Gesetze irgend einer Größe) sey. Für die Multiplikation gelten nun folgende Formeln:

I) $(-a).(+b) = (+b).(-a) = -(+ab) = +-ab$
$= -ab = -ba$ (nach §. 13. I.).

Nämlich ohne Rücksicht auf das Zeichen ist das Produkt aus a in b oder aus b in a $= ab = ba$. b soll nach dem Gesetze von a wiederholt durch Addition gesetzt werden. Nun ist aber a eine entgegengesetzte Größe von b, folglich nimmt hier die Addition die Natur der Subtraktion an, und das Produkt ab erhält das Zeichen — nach

Grundsatz I.

II) $(-a).(-b) = -(-ab) = +ab$.

Man hat nämlich ohne Rücksicht auf die Zeichen oder

die Entgegensetzung der Größen das Produkt ab. Denkt man sich das Zeichen + bey b: so hat man nach I) das Produkt —ab.) Also hat man wegen —b das Produkt —(—ab). Aber nach Grundsatz II. und dortiger Formel ist —(—ab) = +ab.

Anmerkung. Wir können das Verfahren neuerer Mathematiker nicht loben, welche nämlich aus bloßen Begriffen beyde Grundsätze ableiten wollen, und um dieß zu vermögen, schon die Definitionen (z. B. von Multiplikation — eine Größe so und sooft nehmen, wie und wieoft die Einheit in der andern Größe enthalten sey . . .) darnach einrichten. Wenn die Entgegensetzung mit den Größen selbst ursprünglich d. i. mit der Natur der Größen selbst gegeben wäre, und nicht vielmehr nur in gewissen Bedingungen der Größen haftete, dann hätten es diese Mathematiker allerdings besser getroffen, als die ältern, die bey diesen Formeln sich lieber auf einen Beweis ex absurdo, als auf logische Grundsätze, wie »2 Negationen machen eine Affirmation« — oder auf sonstige Begriffszergliederungen berufen wollten. Ueberhaupt ist es wider die Natur der Mathematik, Beweise aus Begriffen zu führen, und alles gleichsam durch Begriffe zu fesseln. Auch stimmen derley Definitionen, wie die oben angeführte, nicht mit der Behauptung eben jener Mathematiker überein, daß nämlich der Multiplikator, wie der Divisor, seiner Natur nach unbenannt seyn müsse.

§. 15. Dieselben Regeln, die in Ansehung des Zeichens für das Produkt gelten, gelten auch in Betreff des Zeichens für den Quotienten, indem überhaupt das Dividiren der Größe a durch die Größe b ein Multiplizi-ren derselben Größe a mit der Größe $\frac{1}{b}$ ist. Der allgemeine Divisionsausdruck $\frac{a}{b}$ hat nämlich auch den Sinn, daß die Einheit, auf welche sich der Dividend a bezieht, in Theile, wie sie der Divisor benennt, getheilt sey, und daß diese Theile $\frac{1}{b}$ nach dem Gesetze des Dividends a

wiederholt zu sich addirt seyen. So ist $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, und $\frac{9}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ldots$ (9mal). Man kann daher statt des Divisors $(\pm b)$ immer setzen den Faktor $(\pm \frac{1}{b})$.

Der Buchstabencalcul als allgemeine Größenlehre.

§. 16. Aus der bisherigen Darstellung der Vorzüge des Buchstabencalculs vor dem Zifferncalcul kann man nun mit Bestimmtheit die Frage beantworten: in welchem Verhältnisse stehen beyde zu einander? Beyde nämlich gehören zur Arithmetik, als Wissenschaft der Zahlen. Aber durch den Buchstabencalcul wird die Arithmetik als Wissenschaft in ihrer Allgemeinheit, und durch die Ziffernrechnung ihre Anwendung im bürgerlichen Leben zunächst möglich gemacht.

Vermöge eben jener erörterten Vorzüge eignet sich die Buchstabenrechnung 1) ein Theil der reinen Mathematik, oder reinen Größenlehre zu seyn, welche von allen wirklichen Gegenständen abstrahirt. 2) Dadurch, daß man bey dem Buchstabencalcul allgemeine Zeichen hat, auf die Entgegensetzung der Größen Rücksicht nimmt, und alle dahin gehörigen Rechnungsarten nur mit dieser steten Rücksicht darstellt, wird seine sichere Anwendung auf alle Theile der Mathematik, wo nur immer von Zahlen und gezählten Größen die Rede ist, möglich gemacht, ohne besondere Regeln und Grundsätze aufstellen zu müssen. 3) Da in diesem Calcul der Buchstabe jede mögliche Größe bezeichnet: so geben die dazu gehörigen Rechnungsarten im Allgemeinen nur die mannigfaltige Weise an, wie ein Gleichartiges verknüpft werden könne, um eine Größe (Quantum) überhaupt, von der Qualität abgesehen, zu erzeugen, oder die Quantität zu bestimmen. Die allgemeine Verknüpfungsart des Gleichartigen zur Erzeugung eines Quantums ist die Addition mit ihrer entgegengesetzten Verknüpfungsart, der

Subtraktion, beydes ursprüngliche Verbindungsarten. Wieoft aber ein Gleichartiges zur Erzeugung eines Quantums müsse verknüpft werden, oder wieoft diese Verknüpfung in einem Quantum mit dieser bestimmten Quantität vorgenommen worden sey, ist nur durch die Zahl auszumitteln.

So erhellt, daß der Buchstabencalcul, inwiefern er die allgemeine Addition und Subtraktion enthält, und die Arithmetik als Wissenschaft der Zahlen konstituirt, die allgemeine Größenlehre mit Recht genannt werden müsse (vergl. S. 2. c.).

Hauptaufgabe der Algebra.

§. 17. Die Buchstabenrechnung, als allgemeine Größenlehre, hat zum Objekte die Quanta überhaupt, d. i. inwiefern sie lediglich als Adgregate gleichartiger Einheiten betrachtet werden; wobey also von aller Beschaffenheit des zu einem Quantum vereinigten Gleichartigen, oder der Art der Vereinigung des gleichartigen Mannigfaltigen abgesehen wird.

Erstere Quanta heißen daher arithmetische, die letzteren aber, wobey man außer der allgemeinen Eigenschaft der Größen, als bestimmter oder unbestimmter Adgregate gleichartiger Einheiten, auch noch auf die genannte besondere Beschaffenheit Rücksicht nimmt, heißen geometrische Quanta (vergl. S. 3.).

Unbestimmt nennt man ein arithmetisches Quantum, wenn es der Willkühr überlassen, oder keine Bedingung angegeben ist, bis wieweit man zur Erzeugung des Quantums die Verbindung gleichartiger Einheiten fortsetzen soll. So wird durch die Zahl 7 ein bestimmtes, durch den Buchstaben a ein in Rücksicht seiner Quantität unbestimmtes, durch beyde Zeichen ein bekanntes Quantum vorgestellt.

§. 18. Größen, deren Quantitätsbestimmung lediglich von Bestimmung der Quantität der unbestimmten bekannten Größen so abhängt, daß, wenn sich die der letztern ändert, auch die Quantität der erstern geändert wird, heißen abhängige oder bedingte Quanta. Nennt man die abhängigen Größen relative, so muß man die andern, durch welche jene bedingt werden, absolute Quanta heißen. So ist die Quantität der gemeinschaftlichen Bewegung oder Geschwindigkeit zweyer unelastischer Körper nach dem Stoße durch ihre Massen und durch die Geschwindigkeiten bedingt, mit welchen beyde Körper vor dem Stoße sich in entgegengesetzter Richtung bewegten.

Die Quantität der relativen Größe ist bekannt, sobald man 1. alle jene absoluten Quanten, von welchen sie abhängt, und 2. das Gesetz dieser Abhängigkeit selbst kennt. Denn in diesem Falle erkennt man die Quantität des relativen Quantums aus den für die absoluten Größen willkührlich angenommenen Werthen. Im Gegentheile ist das relative Quantum unbekannt.

§. 19. Bringt man nun die absoluten Quanta a, b, c . . , von welchen ein relatives Quantum abhängt, vermittels der Zeichen, durch welche die bey Größen möglichen arithmetischen Operationen angedeutet werden, so untereinander in Verbindung, und formet dann dieselben so, daß ein Zeichen entsteht, welches das Gesetz anschaulich darstellt, nach welchem durch arithmetische Operationen aus den absoluten Größen das relative Quantum erzeugt werden soll: so nennt man jenes Zeichen einen algebraischen Ausdruck, oder die relative Größe algebraisch dargestellt. Die Art, wie in diesem Ausdrucke die allgemeinen Zeichen a, b, c . . . geformt und verbunden sind, heißt die Form des algebraischen Ausdruckes. Drückt man im obigen Beyspiele die Masse des größeren Körpers A durch M, die klei-

nere von B durch m, die größere Geschwindigkeit von A durch C, die kleinere von B durch c aus: so ist Q oder $x = \frac{MC - mc}{M + m}$ der algebraische Ausdruck für die Quantität der gemeinschaftlichen Bewegung, mit welcher die in entgegengesetzter Richtung vor dem Stoße bewegten Körper nun nach dem Stoße fortgehen. Die Form dieses Ausdruckes besteht darin, daß man 1) das Produkt aus der größeren Masse in die größere Geschwindigkeit und dann aus der kleineren Masse in die kleinere Geschwindigkeit erzeugt; 2) letzteres Produkt vom erstern abzieht; 3) diese erhaltene Differenz durch die Summe beyder Massen dividirt. Setzt man daher z. B. M=2; m=1; C=6 und c=3: so erhält man durch die Substitution dieser willkührlich angenommenen Werthe das relative Quantum x oder $Q = \frac{12-3}{3} = \frac{9}{3} = 3$.

§. 20. Die Hauptaufgabe der Algebra besteht nun in der Aufsuchung brauchbarer und leicht anwendbarer Methoden, vermittels welcher man das Gesetz der Abhängigkeit einer jeden abhängigen Größe x erkennen und algebraisch darstellen kann.

Begriff und Eintheilung der Algebra.

§. 21. Die Algebra, als zur mathematischen Analysis überhaupt gehörig (Einleit. I. 2. unter e.), stellt zur Auffindung eines Ausdruckes der relativen unbekannten Größe nur solche Methoden auf, welche auf der Formation und Resolution der Gleichungen beruhen. Sie wird daher, wie die Analysis, in die niedere (Elementaralgebra), und höhere Algebra eingetheilt. Nach der Uebereinstimmung der meisten Mathematiker lehrt die niedere Algebra Gleichungen von jedem reinen Grade und von zweytem gemischten

Grade mit einer oder mehreren unbekannten Größen auflösen. Die höhere Algebra dagegen hat die Auflösungsmethoden der Gleichungen von höherem (den 3. 4. 5. . .) Grade zum Gegenstande. Die nähere, dem Anfänger nöthige Bestimmung der hier gebrauchten Ausdrücke, so wie die weitere Eintheilung der niedern Algebra in die bestimmte und unbestimmte, folgt unten bey der Ausführung dieser Lehre. Die unbestimmte Algebra heißt (nach Eüler) auch die unbestimmte Analytik, oder auch diophanteische Analysis, weil Diophantus aus Alexandrien (im 4. Jahrh. nach Chr. Geb.) ein Werk (das älteste über Algebra, das wir kennen) in 13 Büchern über arithmetische Aufgaben, die größtentheils zu den unbestimmten gehören, geschrieben hat.

Anmerkung. Der arabische Artikel Al im Worte Algebra zeigt, daß dieser Name arabischen Ursprungs sey, wie denn auch die Europäer diese Wissenschaft zuerst von den Arabern erhielten. Golius in einer Anmerkung zu Alfragan's Astronomie leitet jenen Namen von einem arabischen Worte her, das »einen zerbrochenen Knochen heilen« bedeutet, als habe mon hiedurch auf analoge Weise das Einrichten und Auflösen der Gleichungen, und das hiebey vorkommende Verfahren, die Brüche aufzuheben oder möglichst zu vermeiden, bezeichnen wollen. Was im 15. Jahrhunderte von der Algebra bekannt war, enthält unter Andern das Werk: »Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita,« welches Lucas de Burgo sancti sepulcri (»frater Ordinis minorum et sancte theologie humilis professor«) zu Venedig 1494 herausgab*). In diesem Werke findet sich die Ueberschrift: »L'Arte maggiore, ditta dal vulgo la Regula de la Cosa, over Algebra e Almucabala.« Den ersten Ausdruck übersetzt Lukas durch »restauratio« (was der oben angegebenen Herleitung des Wortes zusagt), den letzteren aber durch »oppositio vel cõtẽptio

*) Kästner beschreibt dieses Buch ausführlich im I. Th. seiner Geschichte d. Mathem. S. 60 u. ff.

(vielleicht contentio, Zusammenstellung) et solidatio.« Arte maggiore hieß die Algebra zum Unterschiede von Arte minore, die sich mit den im gemeinen Leben vorkommenden nützlichen Rechnungsfällen beschäftigt; Regel Coß oder kurzweg Coß hieß sie, weil man die gesuchte Größe (in der ersten Potenz) Ding (cosa) nannte. Die Mathematiker des 16. Jahrhunderts nannten sie »regula rei et census;« der letztere Ausdruck bezeichnet das Quadrat der unbekannten Größe.

Einrichtung dieses Lehrbuches in Ansehung seines Inhaltes.

§. 22. 1. Es unterbleibt hier die Erklärung der schon aus der Ziffernrechnung bekannten arithmetischen Zeichen. — 2. Eben so werden hier nicht alle Gegenstände, die schon in der Ziffernrechnung erklärt werden mußten, nochmals definirt, sondern nur diejenigen Erklärungen finden hier eigends ihren Platz, ohne welche dieses Lehrbuch kein der Hauptsache nach für sich bestehendes Ganzes bilden könnte. — 3. Da die Lehren von den Brüchen, von der Rechnung mit benannten Zahlen und von der goldnen Regel, wie sie in meinem Lehrbuche der Ziffernrechnung abgehandelt sind, ihrem Wesen nach dieselben für die Buchstabenrechnung bleiben: so unterbleibt hier ihre volle Ausführung; jedoch wird die leichte und sichere Anwendung der Buchstabenrechnung auf eben jene Lehren nachgewiesen. — In Betreff der Potenztheorie muß in diesem Lehrbuche das durch den Buchstabencalcul mögliche Allgemeine dargestellt werden. Nebst einer kurzen Anwendung des Allgemeinen auf die Bildung der Quadrat- und Würfelzahlen und auf die Wurzelausziehung aus diesen lernen wir hierbey eine dem Buchstabencalcul eigenthümliche Rechnung mit Wurzelgrößen kennen, welche auch für die andern Theile der Mathematik von Wichtigkeit ist.

§. 23. Außerdem muß in diesem Lehrbuche erstens noch der eigene, mittels allgemeiner Zeichen anzustellende,

Calcul in den vier Stammspecies (den Grund- oder Fundamentalrechnungsarten) der Arithmetik dargestellt und das Gesetzmäßige desselben bewiesen werden.

Diese 4 Stammspecies sind nothwendig dieselben für die Ziffernrechnung. Allein hier, wie überall im rein mathematischen Calcul, strebt der Mathematiker nach Kürze und Bequemlichkeit im Ausdrucke. Von der ersten liefert uns die Behandlung der Brüche schon häufige Beyspiele. Die Kürze erzielt der Mathematiker durch Reduktion, durch diese und besonders durch Substitution den bequemern Ausdruck. Die Reduktion ist daher weder eine eigene Spezies, noch gehört sie nur einer Spezies an. Sondern dieses Verfahren, die durch mancherley arithmetische Operationen getrennten Größen zu vereinigen, wird vom Mathematiker vorgenommen, um das Resultat der Rechnung entweder deutlicher darstellen und das daraus fließende Gesetz kürzer und bestimmter angeben zu können, oder um sich die Fortsetzung des Calculs zu erleichtern. Durch Substitution, welche ein Setzen eines Gleichen für ein Gleiches ist, bezweckt der Mathematiker dasselbe, besonders aber die leichtere Berechnung des Ausdruckes in bestimmten Zahlen.

Zweytens muß hier noch, nebst der Algebra, die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen in Beziehung auf die Progressionen in ihrer Allgemeinheit sowohl, als mit ihrer nützlichsten Anwendung abgehandelt werden. Die Logarithmen-Theorie, deren Fundament die Wissenschaft von den Progressionen ist, sammt ihrer Anwendung, dann die elementare Combinationstheorie machen den Beschluß der in diesem Lehrbuche abzuhandelnden Materien.

Der Grund, warum wir die zuletzt genannten Gegenstände erst nach Auseinandersetzung der Grundsätze und Regeln der niedern Algebra und ihrer Anwendung

abhandeln, liegt theils darin, um ihren Zusammenhang nicht zu unterbrechen, theils darin, weil es nach vorausgeschickten algebraischen Kenntnissen leicht wird, die mancherley Aufgaben, welche uns in jenen Theilen dargeboten werden, mittels der Gleichungen richtig zu lösen.

Axiome.

§. 24. I. Das Ganze ist größer, als ein Theil desselben. Oder: ein Theil ist kleiner, als das Ganze, zu dem er gehört.

II. Das Ganze ist gleich der Summe der Theile, in welche es getheilt wurde. Mit andern Worten: das Ganze ist gleich allen seinen Theilen zusammengenommen. Hieraus folgt:

a. Nimmt man alle Theile von dem Ganzen weg, so bleibt nichts übrig.

b. Thut man die von einem Ganzen weggenommenen Theile zu den übriggebliebenen hinzu, so hat man wieder das Ganze.

III. Jede Größe ist sich selbst gleich (a=a).

IV. Größen, die einander gleich sind, lassen sich für einander setzen, oder substituiren.

V. Größen, die einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich. Nämlich: wenn a=(b) und auch c=(b) ist, so ist auch a=c. Hieraus folgt:

Wenn n Größen einander gleich sind: so ist jede beliebige jeder andern beliebigen, z. B. die erste Größe auch der letzten gleich. Es sey nämlich a=b=c=d... so ist z. B. auch a=d. Denn weil a=(b), aber auch c=(b) ist: so ist auch a=(c); weil ferner auch d=(c) ist: so ist auch a=d.

VI. Eine Größe, welche größer oder kleiner ist, als eine von zwey gleichen Größen,

ist auch größer oder kleiner, als die andere dieser Größen. Es sey nämlich $a=b$, aber $c>$ oder $<a$: so ist auch $c>$ oder $<b$; und umgekehrt: wenn $a>$ oder $<c$ ist, so ist auch $b>$ oder $<c$.

Hieraus folgt, daß, wenn $a>b$, und $b>c$ ist, um so mehr $a>c$ sey; oder daß, wenn $c<b$, und $b<a$ ist, um so mehr $c<a$ sey.

Mehrere, noch eigends auf die Lehre von den Stammspezies und den Potenzen und Wurzeln beziehliche, Axiome lassen sich

VII. durch das Axiom zusammenfassen:

Entgegengesetzte arithmetische Operationen, an derselben Größe auf ganz gleiche Weise vorgenommen, heben sich gegenseitig in dem Sinne auf, daß diese Größe ungeändert bleibt. So ist 1) $(a)\pm b\mp b=(a)$; 2) $\frac{(a)\times b}{b}=(a)$; 3) $\sqrt[m]{(a)^m}=(a)$.

Eben so lassen sich die noch eigends auf die Lehre von den Gleichungen beziehlichen Axiome

VIII. durch das Axiom zusammenfassen:

Nimmt man an gleichen Größen dieselbe mathematische Operation auf gleiche Weise vor: so sind die so geänderten Größen wieder gleich, oder die Gleichheit wird nicht verletzt. Setzt man nämlich $x=a$: so ist auch 1) $-x=-a$; 2) $x\pm b=a\pm b$; 3) $nx=na$; 4) $\frac{x}{c}=\frac{a}{c}$; 5) $x^m=a^m$; 6) $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$; 7) der Logarithmus von x = dem Logar. von a. Und umgekehrt: wenn nämlich $-x=-a$ ist, so ist auch $+x=+a$ (kürzer: $x=a$), u. s. w. Es stehen nämlich gleiche Grrößen für eine und dieselbe Größe

g: so 5+1 und 8−2 für dieselbe Zahl 6. Gleichwie nun vermöge Axiom III. −g=−g, oder gn=gn, u. s. w. ist, eben so sind die angeführten Veränderungen axiomatisch gültig.

Einige dieser Aenderungen pflegt man ihres häufigen Gebrauches wegen auch wörtlich auszudrücken, z. B. die Aenderung unter 3): wenn die einfachen Größen (x, a) gleich sind: so sind auch ihre Gleichvielfachen (nx, na) gleich, und umgekehrt. Eben so die Aenderung unter 4): wenn die Ganzen (x, a) gleich sind: so sind auch ihre gleichvielsten Theile $\left(\frac{x}{c}, \frac{a}{c}\right)$, und ins Besondere (wenn c=2 gesetzt wird) ihre Hälften gleich, und umgekehrt.

Zusatz. Wenn man $x > a$ oder $< a$ setzt: so bleiben alle jene Veränderungen auch in Beziehung auf diese Zeichen gültig; so wenn $x > a$ ist, so ist auch $nx > na$ und $x^m > a^m$, u. s. w., und umgekehrt. Denn wäre nx nicht $> na$, so wäre nx entweder $= na$, oder sogar $< na$. In erstem Falle müßte vermöge 3) auch x=a seyn, wider die Voraussetzung. In zweytem Falle wäre, da $a < na$, nx um so mehr $< a$ (vermöge VI.); aber $x < nx$, um so mehr also auch $x < a$, ebenfalls wider die Voraussetzung, u. s. w. Wenn man daher die 3 Zeichen $>$, $=$, $<$ durch das einzige Z darstellt: so kann man jene axiomatischen Veränderungen allgemein und zusammen so ausdrücken: Wenn xZa ist, so ist auch z. B. nxZna, u. s. w., und umgekehrt.

Erster Abschnitt.

Die Reduktion.

§. 25. Erkl. 1. Größen heißen verschieden (diversa), sofern in der einen etwas ist, was in der andern nicht ist; einerley (eadem), sofern sie nicht verschieden sind.

So bezeichnen a und a, 2b und 2b, a^3 und a^3 einerley, oder, inwiefern man bloß auf ihre Quantität sieht, gleiche Größen.

Zusatz. Also lassen sich einerley Größen für einander substituiren (§. 24. Ax. IV.), und Größen, die sich für einander substituiren lassen, sind einerley.

So kann man statt 4 die Zahl $3+1$; $2+2$; $5-1$ u. s. w. substituiren.

§. 26. Erkl. 2. Größen heißen gleichartig, homogen, in so ferne man auf das sieht, was in ihnen einerley ist; ungleichartig, heterogen, so fern man auf das sieht, was in ihnen verschieden ist. Das, was in mehreren Größen einerley ist, (derselbe Name, derselbe Begriff überhaupt), bestimmt die Einheit, auf welche jene Größen bezogen werden können.

Zusatz. Es können also Größen in der einen Rücksicht homogen, in der andern heterogen seyn; so sind der Würfel und die Kugel als Körper homogen; betrachte ich diese Körper aber in ihrer besondern Beschaf-

fenheit, den einen als Kugel, den andern als Würfel, so sind sie ungleichartige Größen. Auch erhellt, daß solche Größen, z. B. 2 Kugeln und 3 Würfel weder 5 Kugeln, noch 5 Würfel seyen, oder daß sie nur in so fern zusammengezählt werden können, als sie sich auf dieselbe Einheit (hier „geometrischer Körper") beziehen lassen.

§. 27. Hypothese. Der Mathematiker bezeichnet Größen, die er als solche betrachtet, welche entweder außer dem Gattungsmerkmale (der Größe), oder derselben Einheit, auf welche sie sich beziehen lassen, nichts mehr miteinander gemein haben, durch ganz verschiedene Buchstaben, z. B. die Zahl 4 und 7 durch a und b, und nennt diese Größen heterogene Buchstabengrößen. Wo daher immer sich derley verschiedene Buchstaben befinden, ungeachtet die Größen noch etwas gemein haben: so sind sie dem Mathematiker doch heterogene Buchstabengrößen; z. B. 2a und 2b; a^3 und b^3; ab und bc u. d. gl.

§. 28. Erkl. 3. Reduktion ist das Verfahren, durch arithmetische Operationen getrennte Buchstabengrößen in einem Ausdrucke zu vereinigen.

Zusatz. Also können ungleichartige Buchstabengrößen (§. 27.) nicht reduzirt werden.

§. 29. Erkl. 4. Durch die Zeichen + oder — verbundene Größen machen eine mehrgliedrige, mehrnamige oder komplexe Größe (Polynomium) aus, wie a+b+c, oder a+b+c—d. Jede einzelne Größe, a, b, c, d heißt Glied der vorgegebenen Größe.

Hieraus ist zugleich deutlich, was eine eingliedrige, (Monomium), zweygliedrige (Binomium) u. s. f., überhaupt was eine vielnamige, was eine inkomplexe oder einnamige Größe ist.

Zusatz. Also sind auch Größen, wie ab oder abc eingliedrige. Es stellt nämlich abc eine Größe vor, die ein Produkt aus 3 Faktoren a, b, c ist, indem abc für a. b. c steht. Eine mehrnamige Größe, wie a+b, oder a−b, erhält, wenn man sie mit Klammern umschließt, die Form einer einnamigen Größe.

§. 30. Hypothese. Kömmt in der einnamigen Größe derselbe Buchstabe, als Faktor, mehrmals vor, so wird dieses durch eine auf denselben Buchstaben zur Rechten gesetzte Ziffer auf eine kurze Weise angedeutet, welche Ziffer soviel Einheiten ausdrückt, als wie oft dieselbe Größe als Faktor gesetzt ist. So setzt man a^2b^3 statt aabbb. Diese zur Rechten gesetzten Zahlziffern heißen Exponenten. So ist 2 der Exponent von a, 3 der Exponent von b.

Man weiß nun, was der allgemeine kurze Ausdruck $a^m b^n c^r$ sagen will. Die Größen a, b, c heißen Stammgrößen.

Zusatz 1. Hat ein Buchstabe keinen bestimmten Exponenten über sich stehen: so ist dieser die Einheit, z. B. $a = a^1$; $ab = a^1b^1$.

Zusatz 2. Es bezeichnen also Buchstaben mit verschiedenen Exponenten zwar nicht einerley Größen, z. B. a^2, a^3; aber inwieferne wir bey solchen Größen darauf sehen, daß sie einerley Stammgröße haben, nennen wir sie gleichartige Größen, in Ansehung derer also eine Reduktion statt haben kann (§. 28. Zus.).

§. 31. Lehrsatz. Man kann statt ab+ac auch setzen (b+c) ×a oder, was dasselbe ist, (b+c)a.

Beweis. Die Summe ist den Summanden zusammengenommen gleich; es ist folglich in Betreff des Faktums kein Unterschied, ob man die einzelnen Summanden b und c mit a multiplizirt, und dann die Pro-

dukte addirt, oder ob man die Summe (b+c) mit a multiplizirt.

Zusatz 1. Eben so leicht erhellt auch, daß ab—ac =(b—c)a sey.

Zusatz 2. Söndert man so den gemeinschaftlichen Faktor der Glieder einer komplexen Größe ab, und bezeichnet die übriggebliebene Größe mit einem schicklichen Buchstaben, so erhält man einen kurzen und für die weitere Rechnung bequemen Ausdruck. Z. B. ab+bc—bd =(a+c—d)b. Setze ich nun a+c—d=m: so hat man für erstere Größe den kurzen Ausdruck b.m =bm.

Zusatz 3. Mit jeder Größe, als einem Adgregate gleichartiger Einheiten überhaupt, kann man die ihr zum Grunde liegende Einheit multiplizirt denken, indem hiedurch die Art des ursprünglichen Entstehens der Größe bloß ausdrücklich angedeutet wird. So ist die Größe 3=1.3=1+1+1, und überhaupt ist a=1.a; ab=1.ab u. s. f. Es ist folglich auch $\pm a^m \pm a^m \pm a^m = (\pm 1 \pm 1 \pm 1)\, a^m = (\pm 3)\, a^m = \pm 3a^m$; oder $-a-a = (-1-1)a = (-2)\,a = -2a$. Eben so $\pm 3a \mp 2a = (\pm 3 \mp 2)a = (\pm 1)a = \pm a$.

Zusatz 4. Wenn der Mathematiker die hier vor a gesetzte Zahlziffer den Coeffizienten von a nennt: so kennt man nun die eigentliche Bedeutung dieses Wortes aus dem Ursprunge des Coeffizienten selbst; ferner sieht man ein, warum man die Coeffizienten überhaupt als Faktoren betrachtet, so daß man bey der Unbestimmtheit der Größe bc nicht nur 1 als Coeff. von bc, sondern auch b als Coeff. von c, und umgekehrt, ansehen kann, wenn b und c Zahlen bedeuten; denn der Coefficient, wie der Exponent, ist seiner Natur nach nicht eine Größe überhaupt, sondern nur eine Zahl.

Zusatz 5. Die Reduktion der gegebenen oder er-

haltenen Summen und Differenzen von einerley Buchstabengrößen geschieht also lediglich in den Coeffizienten, indem man entweder die Summe der Coeffizienten mit ihrem Zeichen, oder die Differenz der Coeffizienten mit dem Zeichen des größeren vor die Buchstabengröße setzt; z. B. $4ab + 7ab = 11ab$; $8a^3c^4 - 5a^3c^4 = 3a^3c^4$.

Anmerk. Wie hier die Reduktion in den Coeffizienten geschieht: so wird sie bey Produkten und Quotienten in den Exponenten gesetzmäßig vorgenommen, was wir am gehörigen Orte zeigen werden.

Zweyter Abschnitt.

Von den Stammspezies.

I. Addition und Subtraktion.

§. 32. **Erklärungen.** 1. Die **Addition** ist diejenige arithmetische Operation, durch welche eine Größe, (s, als Ganzes) gefunden wird, welche nach Axiom II. (§. 24.) mehrere gegebene gleichartige Größen (a, b,..., als einzelne Theile) in sich vereinigt. Die Größen a, b... heißen **Summanden**, und die Größe s heißt **Summe**, welche daher mit den Summanden **gleichartig** ist.

2. Die **Subtraktion** ist diejenige arithmetische Operation, durch welche eine Größe (b, als einzelner Theil) gefunden wird, welche nach Axiom b. unter II. (§. 24.) zu einer gegebenen gleichartigen Größe (a, als einzelnem Theile) addirt, eine gegebene Größe (s, als Ganzes) hervorbringt. Diese Größe s heißt der **Minuend**, die Größe a der **Subtrahend**, und die gesuchte oder gefundene Größe b der Unterschied (Rest, oder die Differenz). Diese 3 Größen sind daher miteinander gleichartig (§. 26.), und wie durch Addition die Größe s durch Vereinigung der Theile a und b erzeugt wird, so erscheint die Größe s durch Subtraktion wieder in die Theile a und b getrennt, deren einer a der gegebene, und der andere b der gesuchte ist.

Zusatz 1. Man kann also das Addiren als einfaches Zusammensetzen, und das Subtrahiren als einfaches

Trennen oder Zersetzen kurz ausdrücken, so, daß also die Entgegensetzung beyder Operationen klar erkannt wird.

Zusatz 2. So ursprünglich! Wobey denn die einzelnen Größen nicht nur als gleichartig, d. i. auf dieselbe erzeugende Einheit bezogen, sondern auch in einerley Sinne genommen werden.

Wie sich in Beziehung auf übrigens gleichartige Summanden, oder auf Minuend und Subtrahend, welche, wie jene, zugleich den Sinn der Entgegensetzung haben, die Natur der Addition in die der Subtraktion überhaupt, und umgekehrt — verwandle, ist aus §. 12. der Einleitung ersichtlich.

Aus den Formeln des §. 13. der Einleitung erhellt ferner die Bedeutung der Additions- und Subtraktionszeichen in ihrer Zusammensetzung oder Wiederholung; daß nämlich $+-$ oder $-+$ eben das sey, was $-$, und daß $++$, wie $--$ eben das sey, was $+$ ist.

Zusatz 3. Wenn endlich gegen die ursprüngliche Bedeutung der Subtraktion der Minuend kleiner ist, als der Subtrahend: so weiß man aus der erörterten Entgegensetzung der Größen, daß man den kleineren Minuend von dem größeren Subtrahend abziehen, die Differenz aber in entgegengesetztem Sinne, oder mit einem Attribute denken müsse, welches dem entgegengesetzt ist, unter welchem jene Größen gedacht wurden. Soll man z. B. 6 Gulden Vermögen von 4 Gulden Vermögen abziehen, so hat man die Differenz -2, oder $0-2$, d. i. 2 Gulden Schulden. Oder man konnte gleich anfänglich statt $4-6$ auch setzen $4+(-6)$, was nach §. 6. der Einleitung $=-2$ ist.

§. 33. Aufgabe. Gegebene Buchstabengrößen zu addiren und zu subtrahiren.

Auflösung. Der Mathematiker betrachtet die gegebenen Größen addirt, und von einander abgezogen,

indem er im ersten Falle das Zeichen + und im andern das Zeichen — zwischen den Größen gesetzt hat.

Soll man b von a abziehen oder dazu addiren: so ist a—b die Differenz und a+b die gesuchte Summe. Eben so bey vielnamigen Größen; es sey z. B. zur Größe (a+b—c) die Größe (d—e+f) zu addiren oder zu subtrahiren: so ist (a+b—c)+(d—e+f) oder a+b—c+d—e+f die Summe, und (a+b—c)—(d—e+f) =a+b—c—d+e—f die Differenz nach §. 13. In allen diesen Ausdrücken bezeichnen übrigens die Buchstaben (vermöge §. 32.) gleichartige Größen.

Sind unter den gegebenen Größen einerley Buchstabengrößen: so verfährt man nach §. 31. Zus. 5.

Beyspiel I.

Summanden $\begin{cases} 2a+3b^2-15+bc+a^3c^2 \\ 3a-b^2-8-bc-a^2c^3 \end{cases}$

Summe durch Red. $5a+2b^2-23^*+a^3c^2-a^2c^3$.

Beyspiel II.

Minuend	$3a^3+2b-3c+5d+mx^4$
Subtrahend	$2a^3-2b-6c+7d+mx^4$
	$-\quad+\quad+\quad-\quad-$
Differ. d. Red.	$a^3+4b+3c-2d\quad^*$

§. 34. Die ächt mathematische Probe über Addition geschieht nach Axiom a, und die über Subtraktion nach Ax. b. unter II. §. 24. (vgl. §§. 3., 12 der Ziffernr.).

II. Multiplikation und Division.

§. 35. Erklärungen. 1. Die Multiplikation ist diejenige arithmetische Operation, durch welche eine Größe (p, als Summe oder Ganzes) gefunden wird, welche eine gegebene Größe (m, als dieselbe Summande) so oft zu sich addirt enthält, wie oft dieses eine gegebene Zahl (n) anzeigt. So ist $4.3=4+4+4=12$. Die

Größe m heißt der Multiplikand, die Zahl n der Multiplikator, die zu findende Größe p das Produkt oder Faktum; dieses ist daher nach §. 32. Erkl. 1. mit dem Multiplikand gleichartig, und der Multiplikator n seiner Natur nach eine unbenannte Zahl. Die Größen m und n nennt man im Allgemeinen auch die Faktoren, inwiefern man, lediglich die Quantität des Produkts ins Aug fassend, die Art der Einheit, auf welche diese Größen bezogen werden, nicht berücksichtiget, sie folglich wie unbenannte Zahlen betrachtet.

Die älteren Mathematiker definirten kurz: Multiplicatio est repetita additio.

2. Die Division ist diejenige arithmetische Operation, durch welche eine Größe (q) gefunden wird, welche von einer gegebenen Größe (D) so oft abgezogen werden kann, als eine gegebene Zahl (d) anzeigt, so daß also q mit d multiplizirt die Größe D wieder hervorbringt. Die Größe D heißt der Dividend, die Zahl d der Divisor, und die zu findende Größe q der Quotient (quotus). Dieser ist daher nach §. 32. Erkl. 2. mit dem Dividend gleichartig, und der Divisor ist vermöge der Erkl. 1. eine unbenannte Zahl.

Zusatz 1. Gleichwie also das gesuchte Produkt p, als Ganzes, ursprünglich das nfache des Multiplikands m ist: so ist der gesuchte Quotient q ursprünglich das Subdfache des Dividends D, als Ganzen; wie nämlich 12 das 3fache von 4 ist: so ist 4 das Sub3fache oder der 3te Theil von 12. Durch Multiplikation setzen wir also überhaupt ein Ganzes aus gleichen Theilen (12=4+4+4) zusammen, und durch Division theilen wir überhaupt ein Ganzes in gleiche Theile; so 12 in dritte Theile, deren einer 4 ist. In sofern sind also beyde arithm. Operationen einander ursprünglich entgegengesetzt. Wenn daher das Multipliziren ein vielfaches Ver-

mehren ist: so ist das Dividiren ein vielfaches Vermindern. So ist 12 (entsprungen gedacht aus 4. 3) um das 3fache größer, als 4, und umgekehrt ist 4 (entsprungen gedacht aus $\frac{12}{3}$) um das 3fache kleiner, als 12.

Zusatz 2. Sind Dividend und Divisor gleichartige Größen: so ist der Quotient eine unbenannte Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor im Dividend enthalten sey. In diesem Falle ist die Division im eigentlichen Sinne eine wiederholte Subtraktion, indem der Divisor so oft im Dividende enthalten ist, als wie oft er von diesem abgezogen werden kann. Thut man daher den Divisor wieder so oft zu sich hinzu, als der Quotient anzeigt, d. i. multiplizirt man jenen mit diesem: so wird (nach Ariom b. unter II. §. 24.) der Dividend wieder hervorgebracht.

Man mag also die Division als ein Theilen eines Ganzen in gleiche Theile, oder als ein Auffinden, wie oft der Divisor im Dividende enthalten sey, erklären, immer bleibt die Wahrheit evident: Quotus ductus in divisorem, restituit dividendum.

§. 36. Lehrsatz. Die Quantität des Produktes wird nicht geändert, welchen der Faktoren man auch als Multiplikand oder als Multiplikator nehmen mag.

Beweis. Es seyen 3 und 4 die 2 beliebigen Faktoren. Stellt man ihre Einheiten durch Punkte vor, so wird die Quantität des Produktes durch folgendes Schema dargestellt:

. . . .
. . . .
. . . .

Die Summe aller Punkte ist =12. Jede der 3 Horizontalreihen hat 4 Punkte, folglich enthält das Schema 4+4+4, d. i. 4.3 Punkte. Ferner hat jede der 4 [illegible]tikalreihen 3 Punkte, folglich enthält das Schema

3+3+3+3, d. i. 3.4 Punkte. Es ist also sowohl 4.3, als 3.4 =12. Was aber in Ansehung des Produkts aus diesen 2 beliebig gewählten Faktoren bewiesen ist, läßt sich eben so für jedes andere Produkt aus 2 andern Faktoren beweisen.

Zusatz 1. In wiefern man also ein unentwickeltes Produkt bloß durch seine Faktoren darstellt, ist es gleichgültig, in welcher Ordnung man die Faktoren aufeinander folgen läßt. Denn weil sowohl 4.3 =12, als auch 3.4 =12 ist, so ist nach Axiom V. §. 24. auch 4.3 =3.4.

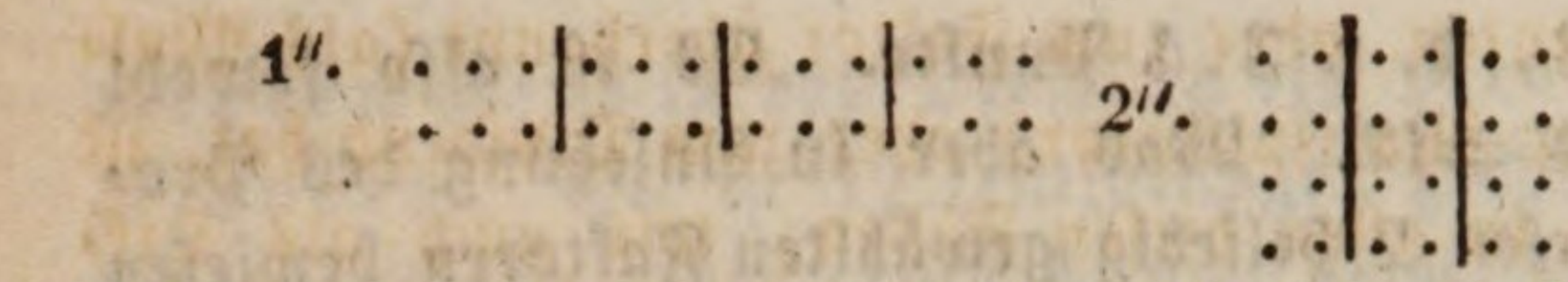
Zusatz 2. Auf gleiche Weise bleibt die Größe des aus 3 oder mehreren Faktoren zu erzeugenden Produkts dieselbe, in welcher Aufeinanderfolge man auch die Faktoren nehmen mag. Es seyen nämlich 2, 3, 4 die 3 beliebigen Faktoren. Bezieht man vorerst die Faktoren 2 und 3, dann 2 und 4, endlich 3 und 4 aufeinander: so hat man, wie vorhin die Schemate

1) 2) 3)

Das Schema 1) enthält also, wie oben, 2.3=3.2 =6 Punkte; das Schema 2) enthält 2.4 =4.2 =8 Punkte, und das Schema 3) enthält 3.4 =4.3=12 Punkte.

Nun muß man, um das ganze Produkt zu entwickeln, das erste Schema noch auf den Faktor 4, das zweyte auf den Faktor 3, und das dritte Schema auf den Faktor 2 beziehen. In jedem dieser Fälle muß man entweder jede Horizontal- oder jede Vertikalreihe des treffenden Schema's resp. 4mal, 3mal, 2mal setzen. Dadurch bekömmt man aus jedem Schema 2 Schemate, nämlich:

1. 2. 1′. 2′.



Im Schema 1. z. B. hat jede der 4 Horizontalreihen 6 Punkte, also enthält das Schema 4.6, d. i. nach dem Obigen 4.2.3 = 4.3.2 Punkte; oder jede der 6 Vertikalreihen hat 4 Punkte, also enthält das Schema auch 6.4, d. i. 2.3.4 = 3.2.4 Punkte. Eben so hat im Schema 1″ jede der 2 Horizontalreihen 12 Punkte, also enthält das Schema 2.12, d. i. 2.3.4 = 2.4.3 Punkte; oder jede der 12 Vertikalreihen hat 2 Punkte, also enthält das Schema auch 12.2, d. i. 3.4.2 = 4.3.2 = 2.3.4 = ... = 24 Punkte. U. s. w. Jedes dieser Schemate enthält aber die Summe von 24 Punkten, folglich ist 4.2.3 = 4.3.2 = 2.3.4 = ... = 24.

Hieraus folgt wieder, wie oben, daß es hinsichtlich eines durch seine Faktoren dargestellten Produktes gleichgültig sey, in welcher Ordnung diese Faktoren aufeinander folgen.

Zusatz 3. Wenn man daher ein unentwickeltes Produkt bloß durch seine Faktoren darstellt, und dasselbe durch einen oder mehrere dieser Faktoren dividirt: so enthält vermöge Zus. 2. §. 35, der Quotient die übrigen Faktoren. So ist $\frac{2.3.4}{2} = 3.4$, oder $\frac{3.4.2}{3.2} = 4$.

Wie also bey der Subtraktion ursprünglich die einzelnen Theile des Minuends im Subtrahend und der Differenz getrennt erscheinen: eben so werden in der Division die Faktoren des Dividends durch den Divisor und Quotienten getrennt dargestellt.

Zusatz 4. Es ist $a - a = (1 - 1)a$ (§. 31. Zus. 3.) $= 0.a = 0$; eben so $(a - a)b = b(a - a) = ab - ab$ (§. 31.) $= 0$, d. i. $0.b$, wie $b.0 = 0$; daher nach dem vorigen Zusatze auch $\frac{0.b}{b}$ oder $\frac{0}{b} = 0$. D. i. jede Größe, die 0

zum Coefficienten, oder zum Faktor überhaupt (als Multiplikand oder Multiplikator) oder zum Dividend hat, ist ist =0. Da in allen diesen Fällen, wie auch als Differenz oder Summe entgegengesetzter Größen, die Nulle (cifra) die Stelle einer ganzen Zahl vertritt: so erhellt, daß sie vom Mathematiker mit Recht zu den ganzen Zahlen gerechnet, oder überhaupt als Größe betrachtet und behandelt werde.

A. Multiplikation.

§. 37. **Aufgabe 1. Eingliedrige Buchstabengrößen miteinander zu multipliziren.**

Auflösung. Man hat hiebey seine Aufmerksamkeit auf folgende Punkte zu wenden:

1. Sind beyde Faktoren ungleichartig: so werden beyde ohne Multiplikationszeichen nebeneinander in alphabetischer Ordnung gesetzt; z. B. $a \times b = ab$; $a^3 . b^3 = a^3 b^3$ u. s. w.

Daß aber $ab = ba$, und eben so $abcd = dcba = bcad$ u. s. w. sey, wurde im §. 36. mit Zus. 1. 2. bewiesen.

2. Haben beyde Faktoren einerley Zeichen $+ +$ oder $- -$: so wird das Produkt mit dem Zeichen $+$ gesetzt, oder es wird darunter verstanden, wenn das Produkt im Anfange steht. Verschiedene Zeichen geben im Faktum — (§. 14.).

3. Die Coeffizienten der Faktoren werden, wie in der Ziffernrechnung, miteinander multiplizirt (§. 29. Zus. 4.) z. B. $4ab \times -6cd = -4 . a . b . 6 . c . d = -4 . 6 . abcd = -24abcd$ (nach 1.).

4. Um das Produkt kürzer auszudrücken, setzt man den Buchstaben, der als Faktor mehrmals vorkömmt, mit der Summe seiner Exponenten (§. 30.), wobey die Reduktionsregel des §. 31. Zus. 5. beobachtet wird. Z. B.

$-a^3 \times a^2c = -aaaaac = -a^5\,c$; $a \times ab = aab = a^2b$; $-8a^m c^n \times -3a^{2m}c^r = 24a^{3m}c^{n+r}$; $a^m b \times ab^n = a^{m+1}b^{1+n}$.

§. 38. **Aufgabe 2. Vielgliedrige Buchstabengrößen miteinander zu multipliziren.**

Auflösung. Man multiplizire jedes Glied der als Multiplikand betrachteten Größe mit jedem Gliede der als Multiplikator angenommenen Größe nach den Vorschriften des vorigen §.

Es ist hiebey gleichviel, ob man von der Rechten zur Linken, wie gewöhnlich in der Ziffernrechnung, oder umgekehrt multiplizirt. Letzteres ist indessen das gewöhnliche Verfahren im Buchstabencalcul.

Der Beweis bleibt derselbe, wie §. 21. d. Z.

Beyspiel. $(-a+b)\times(-c-d) = ac-bc+ad-bd$.

Zusatz 1. Ist nur einer der Faktoren eine vielnamige Größe: so erhellt die Multiplikationsregel von selbst. Z. B. $(4a^2-b)\times 3a = 3a\times(4a^2-b) = 12a^3-3ab$.

Zusatz 2. Haben die Glieder beyder Faktoren einerley Buchstaben, so, daß man schließen kann, es werde eine Reduktion in den einzelnen Produkten möglich seyn: so rückt man, um sich dieses Reduziren zu erleichtern, mit dem ersten Gliede jedes folgenden Hauptproduktes um eine Stelle von der Linken zur Rechten hinein.

Beyspiel.

Multiplikand $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$

Multiplikator $a^3-4a^2b+2b^3$

Hauptprodukte
$5a^7-2a^6b+4a^5b^2$
$-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3$
$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$

Ges. Prod. $5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$.

Zusatz 3. Wenn mehr als 2 viergliedrige Größen miteinander multiplizirt werden sollen: so ist leicht er-

sichtlich, daß man das Produkt aus 2 Faktoren auch mit dem dritten, und sofort das erhaltene neue Produkt mit dem vierten u. s. w. multipliziren müsse, und daß es gleichgültig sey, welche Ordnung man hiebei beobachtet.

$$\overset{\text{I}}{(a+b)}\ \overset{\text{II}}{(a-c)}\ \overset{\text{III}}{(c^3-d^2+b^2)}\ \overset{\text{IV}}{(a^3-d^2)}.$$

Hier kann man III mit IV; das Produkt mit II und dann das Produkt aus II. III. IV noch mit I multipliziren. Denn stellt man diese Faktoren durch die eingliedrigen m, n, p, q vor: so erhellt die Wahrheit des Gesagten aus §. 36. Zus. 2.

Nach den gegebenen Regeln findet man noch ins Besondere $(a\pm b)(a\pm b)=a^2\pm 2ab+b^2$; aber $(a\pm b)(a\mp b)=a^2-b^2$. Wenn man die Größen a, b als Wurzeln, folglich a^2, b^2 als ihre Quadrate betrachtet: so hat man den merkwürdigen Satz: Das Produkt aus der Summe zweyer Wurzeln in ihre Differenz ist gleich der Differenz der Quadrate jener Wurzeln, indem man diese Differenz in der Ordnung ansetzt, welche in der angegebenen Differenz der Wurzeln herrscht; — und umgekehrt. So ist $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, aber $y^2-x^2=(x+y)(y-x)$.

Anmerkung. Wenn die Multiplikationsregeln zunächst lehren, aus gegebenen Faktoren ein Produkt zu bilden: so deuten die 2 zuletzt angeführten Ausdrücke auf die Lösung der umgekehrten Aufgabe: „eine vielnamige Größe, als Produkt mehrerer einfachen Faktoren betrachtet, wieder in eben diese Faktoren zu zerlegen.“ Allein so großen Nutzen auch dieses Zerlegen eines Produktes in seine Faktoren dem Mathematiker in vielen Fällen bringen mag: so kann doch die Theorie keine bestimmte Regeln zur Auflösung dieser umgekehrten Aufgabe entwerfen. Fortgesetzte Uebung im Calcul, und Urtheils- oder Erfindungskraft allein vermögen hier zum gewünschten Ziele zu führen.

Da man z. B. weiß, daß $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

und $a^2 = a.a$ sey, so erkennt man leicht, daß auch $x^4 - 1 = x^2.x^2 - 1.1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$ sey. Eben so ist $a^2 - 16 = (a+4)(a-4)$.

Uebrigens ist bey diesen Zerfällungen die Vorschrift: „man sönd re zuerst die leicht in die Augen fallenden gemeinschaftlichen Faktoren ab, und gehe so vom Einfachen zum Zusammengesetzten fort“ — eine bloß den Versuch leitende Regel. Z. B. man soll die Faktoren der Größe

$$3ax^3 + b^2x^2 - 3ac^2x - b^2c^2$$

auffinden. Man sieht sogleich, daß die 2 ersten Glieder den Faktor x^2, und die 2 andern den Faktor $-c^2$ gemein haben, man also setzen könne:

$x^2(3ax+b^2) - c^2(3ax+b^2)$, und demnach $(x^2-c^2)(3ax+b^2)$.

Eine zweyte leitende Vorschrift ist: „man lö se bisweilen ein Glied in 2 einzelne Theile auf.“ Man habe z. B. $a^2+5ab+6b^2$. Setzt man statt $5ab$ die Theile $2ab$, $3ab$, so erkennt man, daß nun die Glieder a^2, $2ab$ den Faktor a, und die Glieder $3ab$, $6b^2$ den Faktor $3b$ gemein haben, daß man also setzen könne:

$$a(a+2b) + 3b(a+2b) = (a+3b)(a+2b).$$

Eine dritte leitende Vorschrift ist: „man addire und subtrahire bisweilen eine und dieselbe Größe.“ Es sey z. B. x^2-x-6 in seine Faktoren aufzulösen. Man setze: $x^2-x+2x-2x-6 = x^2+2x-3x-6 = x(x+2)-3(x+2) = (x-3)(x+2)$. Es sey ferner

$$3a^4+3a^2b^2-12a^2-6b^4+12b^2$$

in die einfachen Faktoren zu zerlegen. Indem man zuerst den gemeinschaftlichen Faktor 3 absöndert, hat man noch

$$a^4+a^2b^2-4a^2-2b^4+4b^2, \text{ oder statt dessen:}$$
$$a^2(a^2+b^2-4)-b^2(2b^2-4), \text{ wie oben.}$$

Um nun diesen letzten Faktor $2b^2-4$ auf a^2+b^2-4 zu

bringen, addire man zu jenem die Größe a^2-b^2, so geht obiger Ausdruck in diesen über:

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-4)$. Allein man sieht, daß dieser Ausdruck um die ganze Größe $-b^2(a^2-b^2)$ unrichtig vermehrt sey; daß man folglich wieder hinzusetzen müsse: $-[-b^2(a^2-b^2)]$, wodurch man erhält:

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-4)+b^2(a^2-b^2)$, oder
$[(a^2+b^2-4)+b^2](a^2-b^2)=(a^2-b^2)\times$
(a^2+2b^2-4).

Es ist also unsere vorgegebene Größe, in ihre Faktoren aufgelöst, diese:

$3(a+b)(a-b)(a^2+2b^2-4)$.

§. 39. Probe. Die ächt mathematische Probe über Multiplikation geschieht durch Division im Sinne des Zus. 3. §. 36., indem vermöge des Grundes auch von entwickelten Produkten gilt, was für unentwickelte gültig ist.

B. Division.

§. 40. Aufgabe 1. Eingliedrige Buchstabengrößen durcheinander zu dividiren.

Auflösung. Man beobachte folgende Regeln:

1. In Betreff des Zeichens für den Quotienten verfährt man nach §. 15.

2. Sollen heterogene Buchstabengrößen durcheinander dividirt werden: so wird die nach 1) durch angezeigte Division erhaltene Größe für den wahren Quotienten gehalten; z. B. $\mp a$ divid. durch $\pm b$ giebt den Quot. $-\frac{a}{b}$ $=\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$, und $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

3. Die Coeffizienten bilden entweder einen Bruch, der keinen kürzeren Ausdruck zuläßt (§. 75. 3.), in wel-

chem Falle sie ebenfalls, wie die Buchstabengrößen in 2), bloß durch Division angezeigt werden; oder sie bilden keinen solchen Bruch, in welchem Falle mit ihnen nach den Vorschriften der Ziffernrechnung verfahren wird. Z. B. $(\pm 4a) : (\pm 5b)$, Quot. $\frac{4a}{5b}$; oder $5a : 6 = \frac{5}{6}a$. Aber $-8a : 4b = -\frac{8}{4}.\frac{a}{b} = -2\frac{a}{b}$; und $4a : 8 = \frac{4}{8}a = \frac{1}{2}a$.

4. Jede Größe durch sich selbst dividirt, giebt zum Quotienten die Einheit; so ist $\frac{a}{a} = 1 = \frac{a^m}{a^m} = \frac{abc}{abc}$. Dasselbe erhellt aus Ax. VI. §. 24., indem $\frac{(1).a}{a} = 1$.

5. Also kann man, wenn im Dividend und Divisor einerley Buchstabengrößen vorkommen, den Quotienten dadurch auf einen kürzeren Ausdruck zurückeführen, daß man jene Größen entweder wegläßt, wenn sie noch mit andern Größen multiplizirt sind, oder an die Stelle des Dividends die Einheit setzt, wenn nur dieser keinen andern Faktor, als die Einheit, bey sich hat.

Beyspiele. $3ab : -4ac := -\frac{3b}{4c}$; $a^2b : a^2 = \frac{a^2}{a^2}b = 1.b = b$; $-4a^m : -4a^mc = \frac{a^m}{a^m}.\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$; $\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$.

Wenn man $\frac{a}{b}$ als Quotienten aus den einfachen Größen (a, b) und an, bn als ihre Gleichvielfachen (Gleich n fachen) betrachtet: so drückt man die letzte Gleichheit eigends durch den Satz aus: Gleichvielfache Größen geben denselben Quotienten, als ihre Einfachen, und umgekehrt.

6. Kommen zwar nicht einerley, aber doch in Ansehung derselben Stammgröße homogene Buchstabengrößen mit bestimmten Exponenten im Dividend und Di-

visor vor: so kann man ganz, wie in 5) verfahren, indem man durch Resolution jener Größen in ihre Faktoren einerley Größen erzeugt. Z. B. $a^4 : a^2 = \frac{a^2}{a^2} . a^2 = a^2$;

$a^4 : a^6 = \frac{a^4}{a^4} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$. Also auch $12a^5b^2 : 6a^4b^7c = 2\frac{a}{b^5c}$.

7. Sind aber die Exponenten der in 6) angenommenen Größen unbestimmt: so ist das allgemeine (auch für den vorigen Fall gültige) Verfahren dieses: man setzt die Stammgröße mit der Differenz der Exponenten, die man nach §. 33. findet, wenn man den Exponenten der im Divisor enthaltenen Größe von dem Exponenten der ihr im Dividend entsprechenden Größe abzieht. Z. B. $a^m : a^n = a^{m-n}$; also auch $-3a^mb : -4a^n bc = \frac{3a^{m-n}b^o}{4c} = \frac{3a^{m-n}}{4c}$ nach 5).

Beweis dieser Regel. Statt der in 6) vorgeschriebenen Reduktionsweise hätte man kurz die in 7) gegebene Vorschrift anwenden können: so ist $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$, oder $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$.

Um aber auf die allgemeine Gültigkeit dieser Reduktionsart zu schließen, darf man sich nur der in §. 37. unter 4) gegebenen Regel und dessen erinnern, daß die Division die der Multiplikation entgegengesetzte Operation ist (§. 35. Zus. 1.). Aus der Bedeutung des Exponenten nämlich (§. 30.) folgt, daß, wenn man vom Exponenten 4 in a^4 die Zahl 2 abzieht, eben soviel thut, als wenn man die Größe a^4 um das a^2fache vermindert, sowie durch Addition derselben Zahl zu 4 die Größe a^4 um das a^2fache vermehrt wird.

Zusatz 1. Es ist also $a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$; so $100^0 = 1$; $(a+b)^0 = (a-x)^0 = (a-a)^0 = (0)^0 = 1$.

Zusatz 2. Eben so erhellt die Bedeutung des Minus- oder negativen Exponenten.

Denn $a^{-m} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{1}{a^{2m}}$; so $20^{-3} = \frac{1}{20^3}$. Hieraus ist klar, daß der —exponent, stammend aus der Division, auch nur eine solche unter Beybehaltung seiner ursprünglichen Bedeutung (§. 30.) anzeigen könne, folglich die Divisionsform nur verschleiere. Der Ausdruck a^{-m} sagt nämlich, daß man die Stammgröße a so oft als Faktor setzen solle, wie oft die Einheit in der Zahl m enthalten ist, und daß man überdieß durch die so erhaltene Größe a^m die Einheit dividiren, oder a^m zum Nenner eines vulgären Stammbruches (wie $\frac{1}{4}$) machen solle.

Zusatz 3. Man kann also jede Divisionsform scheinbar verschwinden machen, oder durch den —exponenten einhüllen; und umgekehrt die so verlarvte Divisionsform wieder eigends herstellen, je nachdem man das eine oder das andere im Calcul für nützlich erachtet. So ist $\frac{a}{b} = ab^{-1}$, und $\frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}$; und umgekehrt ist $ab = \frac{a}{b^{-1}} = \frac{1}{a^{-1}b^{-1}}$. U. s. w.

Zusatz 4. Es ist also obige Multiplikationsregel (§. 37. 4.) auch gültig, wenn die Faktoren —exponenten haben. So ist $a^m . a^{-n} \left(\text{oder } a^m . \frac{1}{a^n}\right) = a^{m-n}$ $\frac{a^m}{a^n}$; eben so ist $a^{-m} . a^{-n} \left(\text{oder } \frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n}\right) = a^{-m+(-n)}$

$= a^{-m-n} = a^{-(m+n)} = a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}}$.

Anmerkung 1. Es ist daher

$$\frac{1}{10} = 0,1 = 10^{-1} \quad \ldots \quad \frac{1}{60} = 1' = 60^{-1}$$

$$\frac{1}{100} = 0,01 = 10^{-2} \quad \ldots \quad \frac{1}{60.60} = 1'' = 60^{-2}$$

$$\frac{1}{1000} = 0,001 = 10^{-3} \quad \ldots \quad \frac{1}{60.60.60} = 1''' = 60^{-3}$$

u. s. w. . . . u. s. w.

Hieraus wird klar, daß man sich sowohl bey Decimal- als Sexagesimalbrüchen (d. i. solchen, deren Nenner natürliche Potenzen von 60 sind) der negativen Exponenten zum Beweise der Rechnungsart mit diesen Brüchen bedienen könne; z. B. $0,3 \times 0,04 = 3.10^{-1} \times 4.10^{-2} = 12.10^{-3} = 0,012$. Eben so $3' \times 4'' = 3.60^{-1} \times 4.60^{-2} = 12.60^{-3} = 12'''$. Derley Ausdrücke allgemein gemacht geben auch die Allgemeinheit der Regeln über den hier stattfindenden Calcul *). Man kann nämlich jede Decimalzahl durch $a(10^{-m}$ oder $b(10^{-n}$, und jede Sexagesimalzahl durch $a(60^{-m}$ oder $b(60^{-n}$, die ganze Zahl aber durch $a(10^0$, oder $a(60^0$ allgemein ausdrücken, wo denn a und b die Zähler der entsprechenden vulgär ausgedrückten Brüche, als ganze Zahlen, und die beygegebenen Faktoren, wie 10^{-m}, 60^{-n}, bloße Charakteristiken sind, anzeigend, wie viele Decimalstellen oder wie viele Striche den Zahlen a und b zu geben seyen. Auf diese Weise zeigt denn der Ausdruck $a(10^{-m} \times b(10^{-n} = ab(10^{-m-n} = p(10^{-(m+n)}$, daß das Produkt $p = ab$ aus 2 zehntheiligen Faktoren, vorerst als ganze Zahl (wie $a \times b$) gefunden, $m+n$ Decimalstellen, d. i. so viele Decimalstellen erhalten müsse, wie viele in beyden Faktoren angegeben sind.

*) Man vergl. meine 1802 herausgegebene Abhandl. »De numeris generatim, et speciatim de num. fractis decim. et sexag.«

Eben so leicht erhellen durch die allgemeinen Ausdrücke $\frac{a(10-m}{b)10-n} = q(10-m+n$, und $\frac{a(60-m}{b(60-n} = q(60-m+n$, wo $q = \frac{a}{b}$, die Regeln über die Division dieser Brüche, indem man $m = n$, oder $> n$, oder $< n$, oder m oder $n = 0$ setzt. Man vergleiche hiebey das über die Behandlungsart dieser Brüche in meiner Ziffernrechnung Gesagte.

Anmerkung 2. Allein auch bey wirklichen Rechnungen, wo die Decimaleintheilung berücksichtigt werden muß, dient mit Vortheil die Anwendung negativer Exponenten; so ist

Millimetr.;	Centimetr.;	Decimetr.;	Metre;
$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$	$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$	$10^{-1} = \frac{1}{10^1}$	$10^0 = 1$

Dekam.;	Hektom.;	Kilom.;	Myriam.
$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$	$10^4 = 10000$ (S. 283. 3.)

Soll also z. B. 13 Decim. durch 11 Dekam. multiplizirt werden: so setzt man $13.11.10^{-1}.10^1 = 13.11.10^0 = 143$ Metr. So beym Dividiren z. B.

$$\frac{7 \text{ Dekam.}}{5 \text{ Decim.}} = \frac{7.10^1}{5.10^{-1}} = \frac{7}{5}.10^2 = \frac{700}{5} = 140 \text{ Metr.}$$

§. 41. Aufgabe 2. Vielgliedrige Buchstabengrößen durcheinander zu dividiren.

Auflösung 1. Haben alle Glieder der gegebenen Größen irgend eine Größe, als Fakor, gemein: so bringt man vorerst den gegebenen Ausdruck, den man durch die Dazwischensetzung des Divisionszeichens erhalten hat, dadurch auf den kürzesten, daß man jenen gemeinschaftlichen Faktor aus jedem Gliede wegläßt, und dann die Division abermals anzeigt.

Denn $\frac{8a^3b - 4a^2bc}{6a^4bc - 2a^3bd} = \frac{(4a - 2c)2a^2b}{(3a^2c - ad)2a^2b}$. Denkt man sich

nun die Größe $\frac{4a\ -2c}{3a^2c-ad}$ einer Größe m gleichgesetzt: so hat man den Ausdruck $m\ \frac{2a^2b}{2a^2b} = m$ (§. 40. 4) 5)), d. i. $\frac{4a\ -2c}{3a^2c-ad}$ ist mit Weglassung der allen Gliedern gemeinschaftlichen Größe $2a^2b$ der kürzeste Ausdruck.

2. Will man, mit dieser so angezeigten Division nicht zufrieden, wirklich dividiren: so wählt man ein schickliches Glied des Divisors zum beständigen einzelnen Divisor, womit man ein schickliches Glied des Dividends nach §. 40. dividirt; weiter verfährt man ganz auf ähnliche Weise, wie in der Ziffernrechnung.

Beyspiel 1. (a ist als beständiger Divisor gewählt).

Dividend.	a^2-b^2	$a+b$ Divisor
	a^2+ab	$a-b$ Quot.
	— —	
	* $-ab-b^2$	
	$-ab-b^2$	
	+ +	
Differ.	0	

Dieses Beyspiel zeigt zugleich, daß die Differenz zweyer Quadratzahlen keine Primzahl sey, da sie sich sowohl durch $a+b$ als $a-b$ genau dividiren läßt.

Beyspiel 2. (Wo für den beständigen Divisor $-5a^2$ die Glieder meistens nach den Exponenten von a geordnet sind, und die Subtraktion sogleich beym Ansetzen der einzelnen Produkte vorgenommen wird.

Dividend $\left\{\begin{array}{r} -20a^4+13a^3b+19a^2b^2-5ab^3 \\ -10a^3c-6a^2bc+2ab^2c \end{array}\right.$ | $-5a^2-3ab+b^2$ Divis.

$+20a^4+12a^3b-4a^2b^2$ | $4a^2-5ab+2ac$ Quot.

Differ. $\left\{\begin{array}{r} +25a^3b+15a^2b^2-5ab^3 \\ -10a^3c-6a^2bc+2ab^2c \end{array}\right.$

Differ. $\begin{array}{r} -25a^3b-15a^2b^2+5ab^3 \\ -10a^3c-6a^2bc+2ab^2c \\ +10a^3c+6a^2bc-2ab^2c \end{array}$

Differ. 0

Für den beständigen Divisor b^2 hätte man die Glieder unseres Beyspieles schicklicher Weise nach den Exponenten von b so geordnet:

$$-5ab^3+19a^2b^2+2ab^2c+13a^3b-6a^2bc-20a^4-10a^3c$$

$$b^2-3ab-5a^2$$

Dann wären die einzelnen schicklichen Dividende folgende Glieder: 1) $-5ab^3$; 2) $4a^2b^2$; 3) $2ab^2c$.

Beweis. Das Produkt aus dem Quotienten in den Divisor ist der Dividend (§. 35. Zus. 2.).

Zusatz 1. Da dieselbe Wahrheit auch die ächtmathematische Probe über Division ausdrückt, folglich hier Beweis und Probe zusammenfallen: so schließen sich nothwendig die Stammspecies.

Zusatz 2. Es erhellt nun, wie man eine vielgliedrige Größe durch eine eingliedrige dividiren könne. Haben nämlich die einzelnen Glieder einen gemeinschaftlichen Faktor: so verfährt man, wie oben unter 1). Dann aber werden sie mit dem Divisionszeichen gehörig gesetzt für den Quotienten gehalten. Z. B. $(a^3-a^2b):a^2c=\frac{a-b}{c}$. Denn wollte man hier noch mit c, wie vorhin unter 2) dividiren: so erhielte man den zweygliedrigen Quotienten $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$, was schon der vorige Ausdruck sagt.

Zusatz 3. Ist endlich der Dividend eine einnamige, und der Divisor eine mehrnamige Größe: so wendet man vorerst dieselbe unter 1. vorgeschriebene Abkürzung im geeigneten Falle an, mit der man sich auch öfters begnügt; z. B. $a:(a-a^2)=\frac{1}{1-a}$. Sonst müßte man gerade so, wie oben unter 2., dividiren; nach welcher Methode man

I) aus $1 : 1-a$ den Quotienten $1+a+a^2+a^3 \ldots$.
II) aus $1 : 1+a$ — — — — $1-a+a^2-a^3 \ldots$.

erhält. Setzt man in I) $a=1$: so hat man $\frac{1}{1-1}$ oder $\frac{1}{0}=1+1+1+\ldots=\infty$. Eben so ist $\frac{a}{1-b}=a+ab+ab^2+ab^3+\ldots$ Daher, wenn man $b-1$ setzt, ist $\frac{a}{1-1}$ oder $\frac{a}{0}=a+a+a+\ldots\infty$; d. i. jede endliche Größe durch 0 dividirt, ist gleich dem Unendlichgroßen. Folglich ist auch $\infty.0$ (gleichsam das Symbol der Zernichtung des Unendlichen) gleich einer unbestimmten endlichen Größe.

Anmerkung 1. Durch derley Divisionen sieht man sich zuerst auf eine Menge Größen gebracht, die, weil sie beyden Beyspielen zufolge einerley Gesetz gehorchen, eine Reihe bilden. Da diese Divisionen fortgesetzt werden können, so weit man will: so sind die Quotienten unendliche Reihen. Denn bey dem wievielsten Akte man auch immer aufhören mag: so muß dieses Aufhören wieder mittels eines angehängten Bruches angezeigt werden: so müßten wir, um in den gegebenen Beyspielen abzubrechen, in I) nach $+a^3$ setzen $+\frac{a^4}{1-a}$ und in II) nach $-a^3$ setzen $+\frac{a^4}{1+a}$. Dadurch wäre zwar der Quotient $\frac{1}{1+a}$ ergänzt: allein die Ergänzung selbst zeigt deutlich genug die noch weitere Fortsetzung desselben Aktes. Uebersehen darf man hiebey nicht, daß, wenn z. B. in I) der Quotient durch Addition von $\frac{a^4}{1-a}$ vervollständigt wird, und nun sowohl dieses Glied, als auch die übrigen 4 Glieder mit $1-a$ multiplizirt werden, der Dividend $=1$, wie es seyn muß, wieder entstehe. Wenn man aber statt des vollständigen Quotienten das Zeichen ∞, als Symbol des in einer unendlichen Reihe fortgehenden Quotienten, d. i. $\frac{a}{0}=\infty$ setzt: so erhellt leicht, daß der Ausdruck $\infty.0$ nicht durch die an-

gedeutete arithmetische Operation nach einer zunächst nur für endliche Größen bekannten Regel, sondern nur mit Rücksicht auf den Sinn des Symbols richtig verstanden werden könne. So nur bewahren wir uns vor den Wahn, da Unsinn zu finden, wo keiner ist.

Anmerkung 2. Auch bey versuchter Verwandlung eines vulgären Bruches in eine gleiche Decimalzahl kömmt man nicht selten auf eine Reihe, welche in Decimalbrüchen ins Unendliche fortgeht. Sobald man nämlich bey fortgesetzter Division auf denselben Rest oder Dividend stößt: erhält man dieselben, in der vorigen Ordnung wiederkehrenden, Quotientenziffern, welche dann eine Periode bilden, die sich ins Unendliche wiederholt. Eine solche mit Perioden ohne Ende fortgehende Decimalzahl nennt man auch kurz einen periodischen Decimalbruch. Wenn die Periode aus mehreren Ziffern besteht, so wird die Anfangs- und Endziffer derselben mit einem Punkte bezeichnet; besteht sie aber nur aus einer Ziffer, so zeigt der über diese gesetzte Punkt, daß diese Ziffer als Quotientenziffer beständig wiederkehre. So ist $\frac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,\dot{3}$; $\frac{1}{7} = 0,142857\,|\,142\ldots = 0,\dot{1}42857\dot{}$.

Wenn man bey der Verwandlung eines solchen Stammbruches, dessen Nenner n Einheiten, — in einen Decimalbruch, dessen Periode n—1 Ziffern enthält, auf die einzelne Dividende 20, 30, . . . (n—1)0 kömmt: so weiß man 1), daß auch alle Multipla von 1 bis (n—1) jenes Stammbruches in periodische Decimalbrüche mit denselben und in derselben Ordnung sich folgenden Ziffern verwandelt werden können, nur daß immer eine andere Ziffer, und zwar diejenige den Anfang macht, welche als Quotientenziffer dem Dividende, welcher das Zehnfache des fraglichen Multiplums ist, entspricht. Z. B. bey Verwandlung des Bruches $\frac{1}{7}$ in den gleichen periodischen Decimalbruch $0,\dot{1}42857\dot{}$ ergeben sich die einzelnen Dividende mit ihren untergesetzten Quotientenziffern, wie folgt:

10, 30, 20, 60, 40, 50.

1, 4, 2, 8, 5, 7.

Hieraus hat man denn sogleich $\frac{2}{7} = \frac{2,0}{7} = 0,\dot{2}85714\dot{}$,

und $\frac{5}{7} = \frac{5,0}{7} = 0,\dot{7}14285\dot{}$ u. s. w.

Eben so weiß man 2), daß dasselbe auch für solche Vielfache des Stammbruches gelten müsse, welche unächte Brüche sind. So ist $\frac{8}{7} = \frac{7}{7} + \frac{1,0}{7} = 1, \dot{1}4 \ldots \dot{7}$, und

$\frac{10}{7} = \frac{7}{7} + \frac{3,0}{7} = 1, \dot{4}2 \ldots \dot{1}$, oder $\frac{23}{7} = \frac{21}{7} + \frac{2,0}{7}$

$= 3, \dot{2} \ldots \dot{4}$.

Wenn man dagegen bey Verwandlung eines Stammbruches nicht alle Dividende von 20 bis (n—1)0 erhält, der entsprechende Decimalbruch also eine Periode von weniger als n—1 Ziffern hat: so können nur die in den gefundnen Dividenden auszudrückenden Multipla des Stammbruches durch dieselben Ziffern des periodischen Decimalbruches dargestellt werden. So ist $\frac{1}{13} = 0,$ $\dot{0}76923$, und die Dividende mit den untergesetzten Quotienziffern sind:

10, 100, 90, 120, 30, 40.
0, 7, 6, 9, 2, 3.

Man erkennt hieraus, daß nur die 3, 4, 9, 10, 12fachen von $\frac{1}{13}$, als ächte Brüche, und diejenigen Vielfachen, die sich durch eine ganze Zahl mit einem jener ächten Brüche darstellen lassen, periodische Decimalbrüche mit denselben Ziffern seyen. So ist $\frac{3}{13} = 0,$ 230769 und

$\frac{16}{13} = \frac{13}{13} + \frac{3,0}{13} = 1, \dot{2} \ldots \dot{9}$.

Einen solchen periodischen Decimalbruch a mit m wiederkehrenden Ziffern kann man umgekehrt leicht wieder in einen gleichen vulgären Bruch verwandeln, wenn man ihn mit 10^m multiplizirt, und von diesem Produkte abzieht. Es sey z. B. $a = 0, \dot{1}42857\dot{}$; so hat man $10^6 . a = 142857, \dot{1} \ldots \dot{7}$, daher $10^6 . a - a = (10^6 - 1)a$

$= 999999 . a = 142857$, folglich $a = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$, indem

der Zähler 14 . . . in diesem Falle selbst das gemeinschaftlich größte Maß ist. Man habe eben so $a = 0,3541\dot{6}$, demnach $10.a = 3,5416$, daher $(10-1)a$ oder $9a = 3,5416 - 0,3541\dot{6} = 3,1875 = \frac{31875}{10000}$, folglich $a = \frac{31875}{90000} =$ (durch Abkürzung mit Hilfe des nach §. 45. 3. aufgefundenen größten gemeinschaftlichen Maßes 1875) $\frac{17}{48}$.

Eine ähnliche Methode lernen wir unten (§. 134. II. Beysp. 3.) in der Progressionstheorie kennen.

Anmerkung 3. Die in obigen Beyspielen 1. 2. nachgewiesene Divisionsmethode würde in allen jenen Fällen, in welchen der Divisor ein Faktor des Dividends ist, überflüssig werden, wenn es entweder immer leicht wäre, den Dividend in seine einfachen Faktoren zu zerlegen, oder wenn hierüber bestimmte Regeln könnten gegeben werden. (Vergl. §. 39. Anmerk.)

Wir finden z. B. in den folgenden Ausdrücken durch bloße, uns schon bekannte, Resolution des Dividends die gesuchten Quotienten, nämlich:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b;$$ eben so ist

$$\frac{a^2 \pm 2ab + b^2}{a \pm b} = \frac{(a \pm b)(a \pm b)}{a \pm b} = a \pm b;$$ ferner

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = a^2 - b^2;$$ und

$$\frac{8a^6 - 4a^5b^2 + 4a^3 + 2a^3 - b^2 + 1}{2a^3 - b^2 + 1}$$

$$= \frac{4a^3(a^3 - b^2 + 1) + (2a^3 - b^2 + 1)}{2a^3 - b^2 + 1}$$

$$= \frac{(4a^3 + 1)(2a^3 - b^2 + 1)}{2a^3 - b^2 + 1} = 4a^3 + 1.$$

Man habe endlich $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$. Wegen der Aehnlichkeit dieses Ausdruckes mit einigen früheren wird man schlie-

ßen, daß a—b ein Faktor von $a^4—b^4$ seyn werde. Um den andern Faktor zu finden, setze man $a^4—b^4 = a^3(a) + b^3(-b)$. Substituirt man ferner sowohl für (a), als für (—b) die Größe a—b, so geht $a^4—b^4$ in den Ausdruck $a^3(a-b)+b^3(a-b)=(a^3+b^3)(a-b)$ über. Dadurch wurde aber das erste Glied $a^3.a$ um $—a^3b$, und das zweyte $—b^3.b$ um $+ab^3$ verändert, daher ist

$a^4-b^4 = a^3(a-b)+b^3(a-b)+a^3b-ab^3 =$

$(a^3+b^3)(a-b)+ab(a^2-b^2) =$

$(a^3+b^3)(a-b)+ab[(a+b)(a-b)] =$

$(a^3+b^3)(a-b)+(a^2b+ab^2)(a-b)$; folglich ist

$$\frac{a^4-b^4}{a-b} = \frac{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a-b)}{a-b} = a^3+b^3+a^2b$$

$+ab^2$ durch bloße Resolution des Dividends gefunden. Allein es ist leicht ersichtlich, daß obige Divisionsregel (§. 41. 2.) schneller zum Ziele geführt hätte.

Dritter Abschnitt.

Von
der Division,
als Messung, und den Eigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen.

§. 42. **Erklärung.** Das Dividiren einer Größe a durch eine andere b, durch welches eine ganze Zahl, als vollständiger Quotient, gefunden wird, heißt **genaues Dividiren, Dividiren ohne Rest**, oder **Messen** (metiri); der Divisor b heißt das **Maß** (mensura, — divisor adcuratus) der Größe a, und diese durch b **theil- oder meßbare Größe**, als Dividend, ist ein **Vielfaches von** b.

Die Division als Messung wird übrigens zunächst auf Zahlen, und zwar auf ganze Zahlen bezogen.

Zusatz 1. Jede Größe mißt sich also selbst (§. 40. 4.), oder ist das 1fache von sich selbst, die Nulle ist meßbar durch jede Größe (§. 36. Zus. 4.), und die Einheit ist ein Maß aller ganzen Zahlen.

Zusatz 2. In jedem andern Falle, wo a nicht = b, ist der kleinere Divisor b, wenn die Division ein Messen ist, Faktor des Dividends a, oder inwiefern b selbst ein Produkt aus mehrern Faktoren ist, sind alle diese Faktoren in a enthalten. Denn der Quotient, als ganze Zahl, mit dem Divisor multiplizirt, bildet ein dem Dividend

gleiches Produkt; die Gleichheit aber zweyer Produkte ist ohne Gleichheit der Faktoren unmöglich.

Zusatz 3. Es ist daher auch umgekehrt jeder Faktor einer Größe ein Maß derselben (§. 36. Zus. 3.).

Zusatz 4. Demnach mißt auch jeder Faktor des Divisors b, der ein Maß von a ist, eben diesen Dividend a (Zus. 2.).

§. 43. Erklärungen. 1. Eine Zahl, die außer sich und der Einheit keine andere ganze Zahl zum Maße hat, heißt absolute Primzahl (numerus primus absolutus), wie 1, 2, 3, 5, 7, ...; das Gegentheil der Primzahl ist die zusammengesetzte Zahl (num. compositus), wie 4, 6, 8, 10, . . . Die Primzahl denkt man sich lediglich aus der Wiederholung der Einheit, die zusammengesetzte Zahl aus der Multiplikation anderer ganzen Zahlen entsprungen. Sind diese Faktoren absolute Primzahlen, so heißen sie einfache, sonst selbst zusammengesetzte Faktoren.

2. Eine Größe a, welche mehrere Größen b, c, d, . . . mißt, heißt gemeinschaftliches Maß (mensura communis) dieser Größen; so ist 3 gemeinschaftliches Maß der Zahlen 9, 27, 36, . . .

3. Wenn umgekehrt eine Größe a von mehreren andern b, c, d, . . . gemessen wird: so heißt a der gemeinschaftliche Dividend oder das gemeinschaftliche Vielfache (§. 42.) der Größen b, c, d, . . . So ist 36 ein gemeinschaftliches Vielfache von 2, 3, 4, 6, . . .

4. Zahlen, welche außer der Einheit keine andere ganze Zahl zum gemeinschaftlichen Maße, folglich keinen Faktor gemein haben (§. 42. Zus. 3), heißen relative Primzahlen (numeri inter se primi), wie 5, 8, 21.

5. Eine Größe a, welche zwey oder mehrere Größen b, c, d, . . . so mißt, daß die Quotienten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, . . .

die kleinsten, d. i. relative Primzahlen sind, heißt eben dieser Größen gemeinschaftlich-größtes Maß (mensura communis maxima, factor communis maximus); so ist nicht 3, sondern 9 das gemeinschaftlich-größte Maß obiger Zahlen 9, 27, 36.

6. Umgekehrt ist a das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Größen b, c, d, . . ., wenn die Quotienten $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \ldots$ relative Primzahlen sind; so ist 36 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 9 und 12, aber nicht von 6 und 9.

Zusatz 1. Von relativen Primzahlen mißt also keine die andere, weil sie außer der Einheit keine ganze Zahl als Faktor gemein haben (Erkl. 4.), welche der Quotient werden könnte.

Zusatz 2. Wenn daher der Dividend a und der Divisor b relative Primzahlen sind: so ist der Quotient $\frac{a}{b}$ der kürzeste; so können $\frac{8}{9}, \frac{8}{4}, \ldots$ wohl verändert, aber nicht kürzer ausgedrückt werden.

Zusatz 3. Wenn unter mehreren gegebenen ganzen Zahlen eine einzige absolute Primzahl, größer 1, vorkömmt: so sind sie relative Primzahlen, wenn jene Primzahl nicht selbst das gemeinschaftliche Maß ist.

Zusatz 4. Aus 6. folgt, daß alle gemeinschaftlichen Vielfachen zweyer oder mehrerer Größen außer dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen Multipla von diesem seyn, daher auch von diesem selbst wieder gemessen werden können (§. 42. Zus. 4.). So ist 18 das kleinste gemeinsch. Vielfache von 6 und 9, und 36, 54, . . . die auch durch 6 und 9 gemessen werden, sind nur resp. die 2 und 3fachen von 18, selbst also wieder durch 18 meßbar.

§. 44. Lehrsatz. Jede zusammengesetzte Zahl m ist ein Produkt aus lauter Primzahlen.

Beweis. Das Maß von m sey die kleinere Zahl c. Ist diese wieder eine zusammengesetzte Zahl: so hat sie, folglich auch m (nach §. 42. Zus. 2.), wieder eine kleinere zum Maß, und so fort, bis man auf die Einheit als letztes Maß, folglich auf eine Primzahl als vorletztes Maß in der Einbildung gekommen ist; d. i. jede zusammengesetzte Zahl hat eine Primzahl n zum Maß.

Nun ist der erste Quotient x aus $\frac{m}{n}$ entweder eine zusammengesetzte Zahl, oder wie n eine Primzahl. In diesem Falle ist, weil $\frac{m}{n} = r$, $m = n.r =$ einem Produkte aus Primzahlen. In jenem Falle habe r zum Maß die Primzahl s; der Quotient sey t: so ist $x = t.s$ und $m = t.s.n$. Da man dieselbe Frage in Ansehung der Zahl t und so weiter, aber doch nicht ins Unendliche wiederholen kann, weil die auch noch so große Zahl m als eine endliche gedacht wird: so ist klar, daß man einmal auf einen Quotienten x kommen müsse, welcher ebenfalls eine Primzahl ist, daß folglich jede zusammengesetzte Zahl m ein Produkt aus lauter Primzahlen, oder $m = n.s \ldots x$ sey *).

§. 45. Lehrsatz. Wenn eine Größe c mehrere andere Größen, z. B. a sowohl, als b mißt: so mißt sie auch 1. die Summe, 2. die Differenz dieser Größen.

Beweis von 1. Es sey $\frac{a}{c} = m$ und $\frac{b}{c} = n$: so

*) Eine sehr nützliche Tafel aller einfachen Faktoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 102000, dann aller sowohl unter diesen Zahlen, als weiter von 102000 bis 400000 vorkommenden absoluten Primzahlen findet man im II. Bande der Vega'schen logar. trigonometr. Tafeln (Leipz. in d. Weidmann'schen Buchh. 1797.).

ist auch, weil $a = cm$, $b = cn$, $a + b = cm + cn$, folglich durch c, wie das ihm gleiche $c(m+n)$ meßbar.

Man sieht, daß der Beweis hinsichtlich mehrerer Größen a, b, d, e, . . . auf gleiche Weise geführt werde.

Der Beweis von 2. erhellt auf dieselbe Art.

§. 46. Eben so leicht findet man auf ähnliche Art die Beweise für folgende Sätze:

1. Wenn eine Größe c die Größen a und $a + b$ mißt: so mißt c auch die Summande b.

2. Wenn c die Größe a mißt: so mißt sie auch ihr Vielfaches ab.

3. Wenn die Größe a eine andere b, und diese wieder die Größe c mißt, so wird auch c von a gemessen, und das Produkt p aus jenen 2 ersten Quotienten zeigt an, wie oft a in c enthalten sey, so, daß folglich der Quotient aus $\frac{c}{a}$ von jedem jener Quotienten gemessen werden kann.

Der Beweis wird kurz so geführt: Es sey $\frac{b}{a} = m$ (d. i. = einer ganzen Zahl) und eben so $\frac{c}{b} = n$, so ist $b = am$, daher $\frac{c}{b} = \frac{c}{am} = n$ uud $c = amn$; aber $\frac{amn}{a}$ $(= mn = p)$ ist ein Messen, folglich ist auch $\frac{c}{a}$ ein Messen, und zwar zeigt das Produkt p aus jenen 2 ersten Quotienten an, wie oft a in c enthalten sey; ferner ist $\frac{p}{m}\left(= \frac{mn}{m}\right)$, oder $\frac{p}{n}$ ein Messen.

§. 47. Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß von 2 Zahlen a, b, die nicht relative Primzahlen sind, zu finden.

Auflösung. Es sey der Bruch $\frac{3760 = b}{9024 = a}$. Man dividire die größere Zahl a durch die kleinere b, den vorigen Divisor b durch den Rest d, und so fort, daß der neue Rest immer wieder Divisor des unmittelbar vorher erhaltenen Restes wird. Der Divisor f, der den Dividend endlich mißt, ist 1. das gemeinschaftliche, 2. das gemeinschaftlich-größte Maß.

Beyspiel.

a.	9024	b.	3760
	7520	c.	2
d.	1504		
b.	3760	d.	1504
	3008	e.	2
f.	752		
d.	1504	f.	752
	1504	g.	2.
	0		

Beweis von 1. aus den Sätzen der §§. 45. 46. Nach der Voraussetzung mißt f den Rest d, also auch das Vielfache de, aber auch sich selbst, also die Summe de + f = b; also auch bc, also auch die Summe bc + d = a, d. i. f mißt b und a.

Beweis von 2. Ist irgend eine noch größere Zahl m, als die vorige f das gemeinschaftliche Maß von a und b: so mißt m (vermöge dieser Annahme das Maß sowohl von a, als b) das Vielfache von b, oder bc, also auch a — bc, oder d. Also mißt m auch de, also auch b — de, oder f, d. i. die größere Zahl m müßte, wenn die Annahme statt fände, ein Maß der kleineren Zahl f seyn. Dieses ist aber ungereimt, also ist der letzte genaue Divisor f auch das gemeinschaftliche größte Maß.

Zusatz 1. Verfährt man auf die vorgeschriebene Art, und erhält den Rest 1: so sind die gegebene Zahlen relative Primzahlen (§. 43. 4.). In unserem Beyspiele, wo f=752, ist der möglichst abgekürzte Bruch $=\frac{5}{12}$.

Zusatz 2. Auf gleiche Weise verfährt man, um das gemeinschaftliche größte Maß vielnamiger Buchstabengrößen zu finden. Hiebey kann man sich aber das Verfahren erleichtern, wenn man 1) aus dem Dividende und Divisor, welchen man bey der Fortsetzung der Rechnung erhält, denjenigen Faktor oder Divisor wegläßt, welchen die andere Größe nicht gemein hat; 2) wenn man den Dividend oder Divisor mit einer dritten Größe, welche weder Divisor der andern Größe ist, noch sonst einen Faktor mit dieser gemein hat, multiplizirt.

Denn durch beydes ändert man nichts an dem gemeinschaftlich-größten Maße. So ist dieses die Größe a von ab und ac: multiplizirt man nun ab mit d: so bleibt dasselbe Maß a von abd und ac. Auch im ersten Falle, wo man aus dem Dividende oder dem Reste, der neuer Divisor wird, einen Faktor wegläßt, ändert dieses Weglassen bloß den Quotienten, der auf das gemeinschaftliche Maß keinen Einfluß hat. So bleibt z. B. 3 auch das Maß von 275, welche Zahl man erhält, indem man den Faktor 5 aus 1395 wegläßt; der Quotient aus dieser letzten Zahl, welche man durch 3 dividirt, nämlich der Quotient 465 ist bloß das 5fache des Quotienten 93, den man aus der Division der Zahl 275 durch 3 erhält. Eben so findet man das gemeinschaftlich-größte Maß der Zahlen 6 und 1395 auf der Stelle, wenn man aus 6 den Faktor 2, den die andere Zahl nicht gemein hat, wegläßt.

Beyspiel 1. Man sucht das gemeinschaftlich-größte Maß von $a^2 - 3ab + 2b^2 = A$, und $a^2 - ab - 2b^2 = B$. A durch B dividirt, hat man 1 zum Quotienten und zum Rest $(-a+2b)2b$. Läßt man den Faktor 2b, welchen

der neue Dividend B nicht gemein hat, weg, und dividirt, so findet man $-a+2b$ als das gesuchte Maß.

Beyspiel 2. Man sucht das gemeinschaftlich-größte Maß von $5a^3-18a^2b+11ab^2-6b^3=C$, und $7a^2-23ab+6b^2=D$. Um keinen Bruch zu erhalten, multiplizire man erst C mit 7 und dividire dann durch D; der Quot. ist $5a$ und der Rest $-11a^2b+47ab^2-42b^3$. Dieser Rest hat noch a^2 mit D gemein; man kann demnach die Division leicht fortsetzen. Man lasse aus dem Reste die gemeinschaftliche Größe b, die D nicht gemein hat, weg, multiplizire, wie vorhin, mit 7 eben diesen Rest, und dividire ihn durch D. Der Quotient ist -11 und der Rest $76ab-228b^2$, den man nach obigen Bemerkungen $a-3b$ gleichsetzen kann, wodurch der bisherige Divisor D nun dividirt wird. Da diese Division keinen Rest läßt: so ist $a-3b$ das gemeinschaftlich-größte Maß der gegebenen Größen, wovon man sich zur Uebung durch Division jeder der angegebenen Größen mit $a-3b$ überzeugen kann.

Beyspiel 3. Man suche das gemeinschaftlich-größte Maß der Größen: $6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2=A$ und $9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3=B$, welche Größen nach den Exponenten von a schon geordnet sind. Indem man vorerst aus A den Faktor a^2 und aus B den Faktor 3b wegläßt, hat man statt A die Größe $6a^3+15a^2b-4ac^2-10bc^2=A'$, und statt B die Größe $3a^3-9a^2c-2ac^2+6c^3=B'$. Der Partialquotient aus $\frac{6a^3}{3a^3}$ ist 2, hiemit B' multiplizirt und das Produkt von A' abgezogen, hat man den Rest $15a^2b+18a^2c-10bc^2-12c^3=3a^2(5b+6c)-10bc^2+12c^3=3a^2(5b+6c)-2c^2(5b+6c)=R$. Läßt man nun aus R den in allen Gliedern vorkommenden Faktor $5b-6c$ weg, indem B' diesen Faktor nicht gemein hat, und dividirt B' durch

$3a^2 - 2c^2$: so erhält man die Partialquotienten 1) $+a$ und 2) $-3c$, und den Rest $=0$, folglich ist $3a^2 - 2c^2$ das gesuchte Maß.

Anmerkung. Man könnte glauben, daß die unmittelbare Zerlegung der Größen A und B in ihre Faktoren (vergl. §. 39. Anmerk. und §. 41. Anmerk. 3.) schneller zum Ziele führte. In der That findet man, daß $A = 3a^4(2a + 5b) - 2a^2c^2(2a + 5b) = (2a + 5b)(3a^4 - 2a^2c^2) = (2a + 5b)(3a^2 - 2c^2)a^2$, und $B = 9a^2b(a - 3c) - 6(a - 3c)bc = (a - 3c)(9a^2b - 6bc^2) = (a - 3c)(3a^2 - 2c^2)3b$, daß folglich $3a^2 - 2c^2$ ein gemeinschaftlicher Faktor, folglich ein gemeinschaftliches Maß beyder Größen A und B sey. Allein nach Weglassung dieses Faktors $3a^2 - 2c^2$ bliebe denn doch noch nach unserer Methode (§. 47.) zu untersuchen, ob die aus A und B übriggebliebenen Größen nicht noch einen andern Faktor gemein hätten, welcher dann mit $3a^2 - 2c^2$ multiplizirt, das gemeinschaftlich-größte Maß beyder Größen A, B seyn würde. Hieraus ist denn klar, daß die Lösung unserer Aufgabe (§. 47.) nicht lediglich der Methode der Zerfällung der Größen in ihre Faktoren zugewiesen werden dürfe.

Zusatz 3. Auf gleiche Weise findet man zu 3 gegebenen Größen A, B, C das gemeinschaftlich-größte Maß. Man sucht dieses nämlich für A und B. Ist das gefundene Maß $= m$ zugleich auch Maß von C, so ist, wie für sich erhellt, m das für jene 3 Größen gesuchte gemeinschaftlich-größte Maß. Im entgegengesetzten Falle aber, wo $\frac{C}{m}$ kein Messen ist, sucht man zwischen m und C das gemeinschaftlich-größte Maß $= m'$. Da nun m' ein Faktor von m, folglich auch von A und B ist (§. 42. Zus. 4.): so ist m' das gemeinschaftlich-größte Maß von A, B, C. Man kann nämlich, da m gemeinschaftlich-größtes Maß von A und B ist, die Größe $A = Fm$ und $B = F'm$, ferner $m = gm'$ und $C = F''m'$ setzen. Demnach ist $A = Fgm'$, $B = F'gm'$ und $C = F''m'$, woraus erhellt, daß A, B, C nur den einzigen Faktor m' gemein haben.

Beyspiel. Man sucht das gemeinschaftlich-größte Maß der Zahlen 10521, 6804, 6447. Dieses Maß für die 2 ersten Zahlen ist nach §. 47. = 63. (= m), aber nicht zugleich auch Maß der dritten Zahl. Man suche daher das größte gemeinschaftliche Maß m′ der Zahlen 63 und 6447; man findet, wie vorhin, m′ = 21. Also ist m′ oder 21 das gesuchte Maß der 3 gegebenen Zahlen.

Eben so haben die Buchstabengrößen $12a^2b^2c = A$ und $8a^3b^2c^2 = B$ nur den Faktor $4a^2b^2c = m$, aber m und $32ab^3 = C$ haben nur den Faktor $4ab^2 = m'$ gemein, also ist m′ das größte gemeinschaftliche Maß von A, B, C.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man dasselbe Maß auch für 4 oder mehrere Größen.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise, wie wir die Aufgabe §. 47. lösten, lassen sich auch gemeine ächte oder unächte, auf den kürzesten Ausdruck gebrachte (§. 43. Zus. 2.), Brüche, oder auch vulgär ausgedrückte Decimalzahlen in einen stetigen Bruch (Kettenbruch), d. i. in einen solchen Bruch verwandeln, der aus mehreren vulgären Brüchen so zusammengesetzt ist, daß mit jedem Nenner eines dieser Brüche wieder ein Bruch verbunden ist.

Wenn man z. B. den Bruch $\frac{421}{972} = \frac{m}{n}$ nach der Methode des §. 47. behandelt: so findet man die einzelnen Quotienten 2, 3, 4, 5, 6 und hieraus

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}}} \quad \text{und} \quad \frac{n}{m} = \frac{972}{421} = \frac{1}{0+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}}}}.$$

Wenn man nämlich sowohl Zähler als Nenner in $\frac{m}{n}$ durch den Zähler m dividirt: so hat man $\frac{1}{2+\frac{130}{421}}$. Die

vidirt man nun in $\frac{130}{421}$ den Zähler sowohl, als den Nenner wieder durch den Zähler: so hat man statt $\frac{130}{421}$ den Ausdruck $\frac{1}{3+\frac{31}{130}}$, also ist $\frac{m}{n}=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{31}{130}}}$

u. s. w.

Hieraus erhellt, daß man mit Hilfe der einzelnen Quotienten, die man nach der Methode des §. 47. auffindet, den ächten Bruch $\frac{421}{972}$ auf die kürzeste Weise in den angeführten gleichen stetigen Bruch verwandle. Weil ferner, wenn man im unächten Bruche $\frac{n}{m}$ (wo $n>m$) sowohl Zähler, als Nenner wieder durch den Zähler n dividirt, allgemein $\frac{n}{m}=\frac{1}{0+\frac{m}{n}}$ ist: so ist auch das Zweyte klar, daß nämlich $\frac{972}{421}=\frac{1}{0+\frac{421}{972}}=\frac{1}{0+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\ldots}}}$

$\ldots\ldots$

oder $=2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\ldots}}$

sey. Diese, übrigens sehr nützliche Formen stetiger Brüche, die man allgemein durch

$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\ldots}}}$ oder $\frac{1}{0+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\ldots}}}$

$\ldots\ldots$ $\ldots\ldots$

darstellt, sind die einfachsten Formen.

Die Theilbrüche sind im ersten Falle $\left(\text{für } \frac{m}{n}\right) \frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}\left(=\frac{1}{2+\frac{1}{3}}\right)$, $\frac{13}{50}\left(=\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}\right)$, $\frac{68}{157}$, und im zweyten

Falle $\left(\text{für den unächten Bruch } \frac{n}{m}\right)$ $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{30}{13}, \frac{157}{68}$. Wenn man darauf merkt, wie diese Partialbrüche aus der regressiven Summation der Glieder eines (unter obigen allgemeinen Formen dargestellten) Kettenbruches entstehen: so abstrahirt man sich leicht die Regel, nach welcher diese Partialbrüche mit Hilfe der Quotienten 2, 3, 4, . . . aufgefunden werden können. Nämlich 1) für den Fall des ächten Bruches $\frac{m}{n}$ dividire man die Einheit durch den ersten Quotienten 2, so hat man den 1. Theilbruch $\frac{1}{2}$. Man multiplizire dann Zähler und Nenner des eben gebildeten Bruches mit dem 2. Quotienten 3, und addire zum neuen Nenner die Einheit: so hat man den 2. Theilbruch $\frac{3}{7} = \frac{1.3}{2.3+1}$. Indem man nun Zähler und Nenner dieses Buches mit dem 3. Quotienten 4 multiplizirt, und zum neuen Zähler den Zähler, zum neuen Nenner den Nenner des vorhergehenden 1. Theilbruches addirt, erzeugt man den 3. Theilbruch $\frac{13}{30} = \frac{3.4+1}{7.4+2}$, und auf gleiche Weise aus dem 3. und 2. Theilbruche den 4ten, u. s. w. 2). Für den Fall des unächten Bruches $\frac{n}{m}$ dividirt man zuerst den ersten Quotienten durch die Einheit, um den 1. Theilbruch $\frac{2}{1}$ zu erhalten. Den Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem 2. Quotienten multiplizirt und zum neuen Zähler die Einheit addirt, hat man den 2. Theilbruch $\frac{7}{3} = \frac{2.3+1}{1.3}$. Dann verfährt man weiter auf die unter 1) angegebene Weise.

Beyspiel. Die Zahl $3{,}1415926 = \frac{31415926}{10000000} = \frac{15707963}{5000000}$ nach §. 47 behandelt, giebt die einzelnen Quotienten:

3, 7, 15, 1, 243, 1, 1, 9, 1, 1, 4.

Hieraus leitet man nach 2) folgende Theilbrüche ab: $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{86598}{27678}$, $\frac{173551}{55243}$, $\frac{1648912}{524865}$, $\frac{1822463}{580108}$, $\frac{5471375}{1740973}$. Behandelt man diesen letzten Bruch in Beziehung auf den letzten Quotienten 4 auf gleiche Art, und findet, wie es seyn muß, den vorgegebenen vulgären Bruch: so hat man hieran eine Verifikation der Rechnung.

Wenn man darauf achtet, wie man diese Theilbrüche durch unmittelbare Summation immer mehrerer Glieder des entsprechenden Kettenbruches erzeugen müßte, so überzeugt man sich leicht von der Wahrheit folgender Sätze:

Jeder der vulgären Theilbrüche nähert sich dem Werthe des vorgegebenen Bruches um so mehr, je höher seine Stelle ist, und zwar für den ächten Bruch $\frac{m}{n}$ ist jeder Theilbruch mit ungerader Stellenzahl (1., 3., 5ter, . . .) größer, und jeder Theilbruch mit gerader Stellenzahl kleiner, als $\frac{m}{n}$. Für den unächten Bruch $\frac{n}{m}$ ist dieses der umgekehrte Fall *).

*) Vergl. meine Abhandlung: »fractionum continuarum theoria et usus« (Würceb. 1810.). Um einen vielziffrigen Bruch durch wenige Ziffern sehr nahe auszudrücken, giebt Metius in seinem Buche »Adriani Metii Alcmariani Arithmeticae libri duo et Geometriae libri VI.« etc. (Lugd. Batavorum ex officina Elzeviriana 1626) pag. 50. die Vorschrift: elige pro numeratore quemvis numerum, eritque ut numerator reducendae fractionis ad suum denominatorem, ita numerator electus ad aliud: reperiesque denominatorem subscribendum numeratori electo, et fractio illa erit minor, quam vera: Verum si denominatori reperto unitas addatur, et numeratori electo subscribatur, fractio illa erit major quam vera, intermedia erit illa, cujus numerator ex numeratoribus, et de-

§. 48. Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, oder den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend von gegebenen Größen zu finden.

Auflösung 1. Erster Fall. Wenn die gegebenen Größen A, B, C, . . . absolute Primzahlen sind: so ist das Produkt P = ABC . . . das gesuchte Vielfache. So ist von 2, 3, 5 die Zahl 30 = 2.3.5 das kleinste gemeinsch. Vielfache.

Beweis. Dieses Produkt ist 1) durch jede der gegebenen Größen theilbar (§. 42. Zus. 3.); 2) die Quotienten BC, AC, AB, . . . sind relative Primzahlen (§. 43. 6.), indem sie außer der Einheit keinen Faktor gemein haben (§. 43. 4.).

Dasselbe gilt, wenn A, B, C, . . . entweder lauter solche zusammengesetzte Zahlen sind, welche verschiedene Primzahlen zu Faktoren haben; oder wenn A, B, C . . . theils absolute Primzahlen, theils solche zusammengesetzte Zahlen sind, die keine jener Primzahlen zu Faktoren haben. Denn in beyden Fällen kann jede Zahl, mit jeder der übrigen verglichen, als absolute Primzahl betrachtet werden, indem sie nicht durch Multiplikation aus eben diesen übrigen Zahlen entsteht. So ist von den

---

nominator ex denominatoribus conflatus est. — Hiezu giebt Metius das Beyspiel: es sey der Bruch 0,0164068, oder, wie er ihn vulgär ausdrückt, $\frac{164068}{10000000}$ zu reduciren. Wählt man z. B. 10 als Zähler, multiplizirt damit jenen Nenner und dividirt das Produkt durch den Zähler 164 . . ., woraus der Quotient 609 hervorgeht: so ist der Bruch $\frac{10}{609} <$, aber $\frac{10}{610} >$ als der vorgegebene, welchem aber der Zwischenbruch $\frac{10+10}{609+610} = \frac{20}{1219}$ sehr nahe kömmt, wie man dieses wirklich findet.

Zahlen 4(=2.2), 15(=3.5), 143(=11.13) die Zahl 8580=4.15.143 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Eben so ist dieses die Zahl 4200(=3.7.8.25) von den Zahlen 3, 7, 8(=2^3), 25(=5^2).

Zweyter Fall. Wenn die Größen A, B, C, . . . entweder lauter zusammengesetzte, also in Primzahlen a, b, c . . . auflösbare (§. 44.), oder theils solche, theils absolute Primzahlen sind, und einen oder mehrere Faktoren gemein haben, wobey auch die Primzahl a wie 1. a betrachtet wird: so erhält man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, indem man das Produkt aus allen verschiedenen Primzahlen, welche den höchsten Exponenten haben, bildet. So ist von den Zahlen 2, 3, 7, 9(=3.3=3^2), 8(=2.2.2=2^3) das Produkt $2^3.3^2.7$ =504 dieses gesuchte Vielfache.

Beweis. Es sey allgemein A = a, B = a^2b, C=b^3c, . . . wo a, b, c, . . . absolute Primzahlen bezeichnen: so ist P=a^2b^3c das kleinste gemeinsch. Vielfache. Denn 1) ist P durch jede der gegebenen Größen theilbar; 2) sind die Quotienten ab^3c, b^2c, a^2 relative Primzahlen, indem sie außer der Einheit keinen Faktor gemein haben. Dasselbe erhellt, wenn A, B, C, . . . lauter absolut zusammengesetzte Zahlen sind; wenn nämlich allgemein A=abcd, B=a^4b^2cd, C=$a^3b^3cd^2$, . . . ist, so hat man das gesuchte Vielfache P=$a^4b^3cd^2$, indem die Quotienten $\frac{P}{A}, \frac{P}{B}, \ldots$ ganze und relative Primzahlen sind.

Zusatz. Um das Auflösen der gegebenen Zahlen in ihre einfachen Faktoren zu vermeiden, unterdrückt man beständig alle kleineren Zahlen, die in den größeren als Faktoren enthalten sind; versucht die Primzahlen 2, 3, 5, . . . als Maße der übrigen Zahlen nach und nach, bis man auf relative Primzahlen kömmt. Das Produkt aus diesen in jene gemeinschaftlichen Maße ist das kleinste ge-

meinsch. Vielfache. Folgendes Beyspiel zeigt diese Operationen deutlich (die obere Zeile enthält die gegebenen Zahlen):

	3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 40, 60
2	9, 12, 27, 20, 30
2	6, 27, 10, 15
2	3, 27, 5, 15 *)
3	9, 5

Also ist $9.5.3.2.2.2 = 2^3.3^3.5 = 1080$ das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache obiger Zahlen 3, 4, 5, . . .

Auflösung 2. oder direkte Auflösung. Man sucht zwischen den 2 gegebenen Zahlen A, B das gemeinschaftliche größte Maß (§. 47.) M, dividirt dann eine der gegebenen Zahlen durch M, und multiplizirt den Quotienten mit der andern Größe: so ist das gefundene Produkt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beyspiel. Es sey $A = 15$, $B = 25$, so ist $M = 5$, und $\frac{A}{5} = \frac{15}{5} = 3$, daher $3, B = 3.25$ das gesuchte kleinste Vielfache.

Beweis. Es sey $\frac{A}{M} = p$ und $\frac{B}{M} = q$, so ist $A = pM$ und $B = Mq$, und die ganzen Zahlen p, q sind relative Primzahlen (§. 43. 5.). Nun ist $q(pM) = p(Mq)$, folglich auch $qA = pB$ (durch Substitution). Weil ferner die aus der Division dieser gleichen Produkte durch A und B entstehenden Quotienten p, q relative Prim-

*) Die unterstrichenen Zahlen sind als die unterdrückten Zahlen zu betrachten.

zahlen sind: so ist jedes dieser Produkte das gemeinschaftliche kleinste Vielfache von A und B.

Wenn nun für mehr als 2 Größen, z. B. für die Größen a, b, c, d das kleinste gemeinschaftliche Vielfache oder der kleinste gemeinschaftliche Dividend gefunden werden soll: so suche man diesen, wie gezeigt worden,

1) von a und b, welches denn e sey;
2) von e und c, welches denn f sey;
3) von f und d, welches denn g sey, . . .

. . . . .

so ist g das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beweis. Nach 3) wird g von f und d, und nach 2) wird f von e und c gemessen, folglich wird auch g von e und c gemessen (§. 46. 3.). Nun wird nach 1) e von a und b gemessen, also wird auch g von a und b gemessen (§. 46. 3.). Demnach ist g ein gemeinschaftliches Vielfaches von a, b, c, d.

Es wird aber jedes gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Größen von dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen eben dieser Größen gemessen (§. 43. Zus. 4.), folglich wird auch jedes gemeinschaftliche Vielfache der Größen a, b, c, d von a und b, also auch von e: mithin auch von e und c, also auch von f; mithin auch von f und d, also auch von g gemessen. Es kann also das gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c, d unmöglich kleiner als g seyn, d. i. g ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c, d.

Beyspiel. Es sey das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (minimus communis dividuus, wie es z. B. Metius nennt) von den Zahlen 3, 4, 12, 7, 9, 8 zu finden.

Dieses Vielfache von 3 und 4 ist 12; nun mißt die dritte Zahl 12 eben dieses Vielfache, also ist 12 das ge-

meinschaftlich-kleinste Vielfache von 3, 4, 12. Weiter ist von jenem Vielfachen 12 und der Zahl 8 das kleinste gemeinsch. Vielf. die Zahl 24, von 24 und 9 die Zahl 72; endlich von 72 und 7 die Zahl 504(=72.7) nach Aufl. 1. Fall erster, also ist 504 der gesuchte gemeinschaftlich-kleinste Dividend.

§. 49. Erklärung. Eine Zahl, deren Hälfte 1 oder eine ganze Zahl ist, heißt eine gerade oder paarige (num. par); jede durch 2 nicht meßbare Zahl heißt ungerade (impar).

Zusatz 1. Nur die Primzahl 2 gehört noch zu den geraden; alle übrigen Primzahlen sind ungerade, und alle geraden Zahlen sind zusammengesetzte; aber nicht umgekehrt.

Zusatz 2. Bezeichnet n eine Zahl, die man erhält, wenn man irgend eine andere durch 2 dividirt, so ist 2n der allgemeine Ausdruck für die gerade, und 2n+1 oder 2n−1 der allgemeine Ausdruck für die ungerade Zahl. Unter derselben Bedingung hat man die gleichgeltenden Ausdrücke 2m und $2m \pm 1$.

Zusatz 3. Da auch $\frac{0}{2}$ ein Messen ist (§. 42. Zus. 1.), so gehört 0 unter die geraden Zahlen, d. i. was von geraden Zahlen wahr ist, gilt auch von 0; aber nicht, was nur von ungeraden wahr ist.

§. 50. Lehrsatz. Jede Zahl, deren ater Theil eine ganze Zahl n ist, kann durch an, jede andere durch an+1; an+2 u. s. w. an+(a−1) vorgestellt werden.

Beweis. Der Rest einer durch a dividirten Zahl, die n zum Quotienten giebt, ist entweder Null, oder 1 oder höchstens a−1 (§. 36. d. Z.).

Zusatz. Also ist 3n für jede durch 3, 4n für jede durch 4 u. s. w. meßbare Zahl; aber 3n+1 und 3n+2;

ferner $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ für jede durch 3 und 4 u. s. w. nicht meßbare Zahl der allgemeine Ausdruck.

§. 51. Mittels der Formeln im Zus. 2. §. 49. läßt sich leicht die Richtigkeit folgender Lehrsätze darthun.

1. Die Summe zweyer geraden oder ungeraden Zahlen ist eine gerade, und die Summe einer geraden und ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl. Nämlich: $(2n+1)+(2m+1) = 2(m+n)+2 = 2(m+n+1)$ meßbar durch 2; aber $(2n+1)+2m = 2(m+n)+1$ nicht meßbar durch 2.

2. Dasselbe gilt vom Unterschiede.

3. Das Produkt aus einer geraden oder ungeraden Zahl in eine gerade ist eine gerade, das aus 2 ungeraden ist eine ungerade Zahl.

Zusatz 1. Aus 1. und 2. folgt, daß die Summe aus einer geraden Anzahl ungerader Zahlen eine gerade Zahl sey; eben so die Differenz zwischen solchen Mengen. Daher giebt eine solche Menge, zur ungeraden oder geraden Zahl addirt, wieder eine ungerade oder gerade Zahl; dasselbe gilt von der Differenz.

Zusatz 2. Aus 3. erhellen leicht die hinsichtlich der Division gültigen Sätze, nämlich:

a. Wenn man eine gerade Zahl durch eine gerade Zahl dividirt: so ist der Quotient eine gerade oder ungerade Zahl; der Rest aber, wenn ein solcher bleibt, ist nur eine gerade Zahl (vermöge 1.).

b. Der Quotient aus der Division einer ungeraden Zahl durch eine ungerade ist nur eine ungerade Zahl; aber der Rest, wenn ein solcher bleibt, ist entweder eine gerade oder ungerade Zahl, je nachdem der Quotient eine ungerade oder gerade Zahl ist.

c. Ist der Dividend gerade, der Divisor, als Maß, ungerade, so ist der Quotient nur eine gerade Zahl. Bleibt aber ein Rest, so ist dieser, wie der Quotient, gerade oder ungerade.

d. Die Division einer ungeraden Zahl durch eine gerade ist nie ein Messen. Der Rest aber ist nur eine ungerade Zahl.

Vierter Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln.

§. 52. **Erklärung.** 1. Das Produkt aus denselben, zweyen oder mehreren, Faktoren heißt **Potenz**, **Würde** (potentia, dignitas). So ist a^2, entsprungen aus a.a; oder a^3, entsprungen aus a.a.a, eine Potenz. Derselbe Faktor a, aus welchem durch Multiplikation mit sich selbst die Potenz entsteht, heißt **Stammgröße**, **Wurzel** (radix), und die Zahl, welche die Menge derselben Faktoren angiebt, heißt **Exponent** der Potenz.

2. Die zweyte, dritte, vierte Potenz nennt man auch resp. **Quadrat** (quadratum), **Würfel** (cubus), **Biquadrat** (quadratoquadratum). Die fünfte Potenz heißt nach **Newton** auch **Quadratocubus**, die sechste **Cubocubus**, die siebente **Quadratoquadratocubus**.

3. Aus einer gegebenen Größe a, als Stammgröße, eine Potenz erzeugen, heißt die Größe a **potenziren** (elevare ad potentiam), und aus einer Potenz die Wurzel a wieder auffinden, heißt **Wurzelausziehen** (extrahere radicem). Beyde arithmetische Operationen sind demnach in demselben Sinne, wie Multiplikation und Division (§. 35. Zus. 1.), einander entgegengesetzt.

Das Zeichen des Potenzirens ist eine über die Stammgröße a zur Rechten gesetzte Zahl, welche so viele Ein-

heiten enthält, als zur wievielsten Potenz die Größe a erhoben werden soll; z. B. $(a)^2$ oder a^2; $(a+b)^3$; $(2)^4$ oder 2^4, je nachdem man nämlich zur 2., oder 3., oder 4. Potenz erheben soll. — Das Zeichen der Wurzelausziehung ist dieses: $\surd$, welchem man noch die Zahl einschreibt, die anzeigt, die wievielste Wurzel gefunden werden soll; so bedeutet z. B. $\sqrt[2]{(a)}$ oder kurz $\surd a$; $\sqrt[3]{(a+b)}$; $\sqrt[4]{16}$, . . . daß man resp. die 2., 3., 4, . . . Wurzel, oder die Quadrat-, Cubik- oder Biquadrat-Wurzel aus den dem Wurzelzeichen nachgesetzten Größen, die man als Potenzen betrachtet, ausziehen soll. — Von den so auf- oder eingeschriebenen Zahlen, als Exponenten der Potenz und Wurzel, sagt man auch, daß sie den Grad der Potenz und der Wurzel ausdrücken.

4. Größen mit vorgesetztem Wurzelzeichen heißen, im Gegensatze der Potenzen, Wurzelgrößen, wie $2\sqrt[m]{abc}$, oder $c\sqrt[m]{a^n b^v}$; die vor dem Wurzelzeichen stehenden Faktoren 2, c werden als Coeffizienten der Wurzelgrößen betrachtet.

Man unterscheidet 1) gleichnamige und ungleichnamige Wurzelgrößen (quantitates radicales ejusdem et diversae denominationis), je nachdem die Exponenten der Wurzeln dieselben oder verschiedene Zahlen sind; so sind $2\sqrt[m]{a}$, $c\sqrt[m]{ab}$, $\sqrt[m]{cd}$ gleichnamige, aber $\surd a$, $\sqrt[3]{a}$, oder $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{a}$ ungleichnamige Wurzelgrößen. Wenn gleichnamige Wurzelgrößen nach dem Wurzelzeichen dieselben Faktoren haben: so sind sie einerley Wurzelgrößen (quant. radic. communicantes), wenn gleich ihre Coefficienten verschieden sind; so $2\surd a$, $3\surd a$, oder $c\surd ab^n$ und $d\surd ab^n$. 2) Sie sind ferner einfache oder zusammengesetzte Wurzelgrößen, wie $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[mn]{a}$, je nachdem der Exponent der Wurzel eine Primzahl oder zusammengesetzte Zahl ist.

Noch kann man 3) algebraische Potenzen und Wurzelgrößen von arithmetischen unterscheiden. Jene finden statt, wenn der unentwickelte Ausdruck der Potenz oder Wurzel mit dem entwickelten identisch ist, also die Bezeichnung des vorzunehmenden Aktes mit der Bezeichnung des vollzogenen Aktes zusammenfällt. So ist $(a)^3$ dasselbe, was a^3; $\sqrt[3]{(a)}$ dasselbe, was $\sqrt[3]{a}$ ist, und allgemein drückt $(a)^m$ oder a^m eine algebraische Potenz, und $\sqrt[m]{(a)}$ oder $\sqrt[m]{a}$ eine algebraische Wurzelgröße aus, was auch a für eine Größe und welche Zahl auch m seyn möge. Und zwar werden jene Ausdrücke gewöhnlich mit dem Zeichen + verstanden, wenn nicht besondere Rücksichten, welche sich weiter unten ergeben werden, eintreten sollen. Setzt man aber $a=2$ und $m=3$: so ist 8 der arithmetische Würfel im Gegensatze des algebraischen a^3, und eben so, wenn $a=8$ gesetzt wird, ist $\sqrt[3]{8}=2$ die arithmetische Wurzelgröße im Gegensatze der algebraischen $\sqrt[3]{a}$.

Zusatz 1. Da (nach Erkl. 1. 2.) $a.a=a^2$; $a.a.a=a^2.a=a^3$; $a.a.a.a=a^3.a$ u. s. w., folglich jede folgende Potenz das afache der unmittelbar vorhergehenden ist: so ist auch umgekehrt jede vorhergehende Potenz der ate Theil der unmittelbar folgenden. Also ist auch

$$a^1=\frac{a^2}{a}=a, \text{ und } a^0=\frac{a^1}{a}=1;$$

d. i. die erste Potenz einer Größe ist mit der Größe selbst einerley, und die nullte Potenz einer jeden Größe ist die Einheit.

Zusatz 2. Wie nach Axiom VI. (§. 24.) $\sqrt[m]{(a)^m}$ oder $\sqrt[m]{a^m}=a$ ist: so ist auch vermöge Erkl. 2. $(\sqrt[m]{a})^m=a$; d. i. gleichwie dieselbe Stammgröße a wieder erhalten

wird, wenn man sie erst potenzirt und dann die ebensovielste Wurzel wieder auszieht: eben so bleibt die Stammgröße ungeändert, wenn man ihre mte Wurzel wieder zur mten Potenz erhebt. So ist $\sqrt[3]{8} = 2$, und 2^3 wieder $= 8$. Es ist also allgemein $\sqrt[m]{(a)^m} = \sqrt[m]{a^m} = (\sqrt[m]{a})^m = a$.

Zusatz 3. Es ist daher auch $(\sqrt[mn]{a})^{mn} = \sqrt[mn]{(a)^{mn}}$ $= \sqrt[\frac{mn}{n}]{a^{mn}} = \sqrt[\frac{mn}{n}]{a^{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$, und umgekehrt ist $\sqrt[\frac{mn}{n}]{a} = \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[m]{a^n}$. So ist $\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3}$, ... und umgekehrt; wobey im Sinne des Ax. VI. die Exponenten der Wurzel und der Potenz unmittelbar aufeinander zu beziehen sind. Mit Worten ausgedrückt, heißt dieses: Gleiche Graderhöhungen, oder gleiche Graddeprimirungen, zugleich an der Wurzel und Potenz vorgenommen, heben einander gegenseitig so auf, daß die Wurzelgröße dieselbe bleibt, welche Größe auch (a), und welche Zahlen auch m und n seyn mögen.

Zusatz 4. Wenn m eine ganze +zahl bezeichnet: so ist $1)^m$ oder $1^m = 1.1.1.... m\,mal = 1$; daher auch $\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{1^m} = 1$; d. i. wie die mte Potenz von 1 wieder $= 1$ ist: so ist auch die mte Wurzel aus 1 gewiß $= 1$, wenn auch dieser Wurzel noch mehrere Werthe zukommen sollten.

I.

Von der Potenzirung eingliedriger Buchstabengrößen und von der Ausziehung der Wurzel aus denselben.

§. 53. Aufgabe 1. Eine eingliedrige Buchstabengröße zur Potenz zu erheben.

Auflösung. Man multiplizire den Exponenten jedes Faktors der gegebenen Größe mit dem Exponenten der verlangten Potenz: z. B. $a^2)^3 = a^6$; $2a^2b^3)^3 = 8a^6b^9$; $a^mb^nc^p)^r = a^{mr}b^{nr}c^{pr}$.

Beweis. Dieser erhellt aus den Erklärungen von Potenz und Exponent. So ist $a^3b^4)^2 = a^3b^4 . a^3b^4 = a^3 . a^3 . b^4 . b^4 = a^6b^8$ oder $= a^{3 \cdot 2} . b^{4 \cdot 2}$.

Zusatz 1. Wie erhebt man vulgäre und Decimalbrüche, die auch Coeffizienten von Buchstabengrößen seyn können, zur Potenz? (Vergl. §§. 100. 118. d. Z.) So ist $(\frac{3}{4}ab^2)^2$ oder $\left(\frac{3ab^2}{4}\right)^2$ oder $0,75\,ab^2)^2 = \frac{9}{16}a^2b^4 = \frac{9a^2b^4}{16} = 0,5625a^2b^4$.

Zusatz 2. Es ist $x)^{-n} = x)^{-1 \cdot n} = x^{-1})^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ (§. 40. Zus. 2.) $= \frac{1^n}{x^n}$ (Zus. 1.) $= \frac{1}{x^n}$ (§. 52. Zus. 4.) $= x^{-n}$ (§. 40. Zus. 2.), wo x irgend eine Größe, und n eine ganze Zahl bezeichnet. Man kann also $(x)^{-n}$ als ein Potenziren, und x^{-n} als erhaltene Potenz betrachten, jenes also ganz nach obiger Regel vollbringen, obgleich der —exponent anzeigt, daß man erst die Größe x zum Nenner eines Stammbruches machen, und sie dann potenziren solle. So ist $a^2b^3)^{-2}$ nach derselben Regel $= a^{-4}b^{-6}$, statt erst zu setzen $\frac{1}{a^2b^3}$, und dann zu potenziren, wodurch man $\frac{1}{a^4b^6}$ erhält; indem dieses wieder $=$ der obigen Größe $a^{-4}b^{-6}$ ist.

Zusatz 3. Da $a^n)^2 = a^n . a^n = a^{2n}$ ist: so erhellt, daß man die nte Potenz einer Zahl a zur nocheinmal so hohen Potenz erhebe, wenn man sie mit sich selbst mul-

tiplizirt. Soll diese gefundene Potenz um einen oder 2 Grade niedriger seyn: so zeigt der Ausdruck $\frac{a^{2n}}{a} = a^{2n-1}$, ... daß man die Potenz a^{2n} durch die Wurzel a, oder durch das Quadrat der Wurzel, ... dividiren müsse. Durch das umgekehrte Verfahren wird dagegen die gefundene Potenz a^{2n} um einen, oder 2 Grade, ... gesteigert.

Beyspiel. Man soll die Zahl 2 zur 63. Potenz erheben. Es ist $2^{4})^2$ oder $16)^2 = 16.16 = 2^8$; $2^{8})^2 = 2^{16}$; $2^{16})^2 = 2^{32}$; $2^{32})^2 = 2^{64}$, daher $\frac{2^{64}}{2} = 2^{63}$, wie $2^{64}.2^2 = 2^{66}$. Man sieht, wie schnell man bey diesem Ueberspringen aller nicht gesuchten zwischenliegenden Potenzen zum Ziele komme.

§. 54. Aufgabe. Aus einer einnamigen Buchstabengröße die Wurzel auszuziehen.

Auflösung. Man dividire den Exponenten jedes Faktors der gegebenen Größe durch den Exponenten der Wurzel.

Beweis. Gleichwie nach §. 53. $a^{m})^n = a^{m.n}$ ist, so ist auch vermöge §. 52. 3. $\sqrt[n]{a^{m.n}} = a^{\frac{m.n}{n}} = a^m$; oder wie $ab)^2 = a^2b^2$ ist, so ist auch umgekehrt $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, und daher denn allgemein $\sqrt[r]{a^m b^n c^s} = \sqrt[r]{a^m}\sqrt[r]{b^n}\sqrt[r]{c^s} = a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}} c^{\frac{s}{r}}$.

Zusatz 1. Der gebrochene +exponent in $a)^{\frac{m}{n}}$ $_r a^{\frac{m}{n}}$ scheint also, wie der —exponent in $x)^{-n}$ oder x^{-n}, eine reine Potenzirung oder bloße Potenz anzuzeigen. Allein jener verhüllt zugleich die Wurzelausziehung,

aus der er stammt, wie dieser die Division. So heißt $10^{0,3} = 10^{\frac{3}{10}}$, man solle 10 zur 3ten Potenz eleviren, und dann die 10te Wurzel ausziehen. Oder da, wenn a eine +größe bezeichnet, $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}})^m$ ist: so heißt auch $10^{0,3}$, man soll die 10te Wurzel aus 10 zur 3ten Potenz eleviren. So ist $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$, und auch $\sqrt[3]{8} = 2$ und $2^2 = 4$.

Zusatz 2. Ist $\frac{m}{n}$ eine gemischte Zahl $= b + \frac{c}{d}$ folglich $a^{\frac{m}{n}} = a)^{b+\frac{c}{d}}$: so erhält man hieraus $a^b . a^{\frac{c}{d}} = a^b \sqrt[d]{a^c}$. So ist $\sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$, und umgekehrt: $2\sqrt{2} = \sqrt{2} . 2^2 = \sqrt{2^3}$.

Zusatz 3. Wie $\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$ (§. 53. Zus. 1.), so ist umgekehrt $\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{a}{b}$; eben so $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$, und u. m.

gekehrt: $\frac{v^{\frac{5}{3}}}{w^{\frac{7}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{v^5}{w^7}} = \frac{v}{w^2}\sqrt[3]{\frac{v^2}{w}}$.

Zur Uebung noch einige Beyspiele ähnlicher Formänderungen algebraischer Ausdrücke! $\sqrt{a^2b^3c^4} = a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{4}{2}} = abc^2\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a^5b^4c^3}{4}} = \frac{1}{2}a^2b^2\sqrt{ac}$; $\sqrt[3]{27a^3b^4} = 3ab\sqrt{b}$; $\sqrt[3]{\frac{24a^4b^3}{27c^4}} = \sqrt[3]{\frac{8.3a^3.ab^3}{27.c^3.c}} = \frac{ab}{3c}\sqrt[3]{\frac{3a}{c}}$; $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$; $3ab\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{27a^3b^4}$; $\frac{c}{2a}\sqrt[4]{bc} = \sqrt[4]{\frac{bc^5}{16a^4}}$; $c\sqrt[3]{a^2} = c.a^{\frac{2}{3}}$; $= a^3c$; $\sqrt[n]{(a^2-x^2)y^n} = y(a^2-x^2)^{\frac{1}{n}}$; $(a^2+x^2)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(a^2+x^2)^4}$.

Bayerische Staatsbibliothek München

Hieraus abstrahirt sich übrigens Jeder, der es noch nöthig findet, leicht die Regel, wie man Coeffizienten einer Wurzelgröße hinter das Wurzelzeichen als Faktoren bringen, und wie man umgekehrt die nach dem Wurzelzeichen stehenden Faktoren vor dasselbe als Coeffizienten setzen könne, ohne die Quantität des Ausdruckes zu verletzen.

Zusatz 4. Auch erhellt der Ursprung und die Bedeutung des gebrochenen —exponenten. Es ist nämlich $\sqrt[n]{x^{-m}} = x^{\frac{-m}{n}} = x^{-\frac{m}{n}}$. Nun ist aber $\sqrt[n]{x^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x^m}}$ (§. 40. Zus. 2.) $= \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{x^m}}$ (Zus. 3.) $= \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ (§. 52. Zus. 4.), folglich ist auch $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$. So ist z. B. $3 . 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{\sqrt{4^3}} = \frac{3}{4\sqrt{4}} = \frac{3}{8}$.

Es macht keinen Unterschied, wenn der Exponent der Wurzel negativ gegeben wird. So bedeutet $\sqrt[n]{a^{-m}}$ eben auch, daß man die nte Wurzel aus a^m zum Nenner eines Bruches, dessen Zähler 1 ist, machen soll. Denn $\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{\frac{-m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}$ *).

Zusaß 5. Da $\sqrt[3]{-a^3} = -a = -\sqrt[3]{a^3}$: so sieht man, daß es bey Cubikwurzeln einerley ist, ob — vor oder hinter dem Wurzelzeichen steht.

---

*) Größen mit gebrochenen Exponenten nennt man auch bisweilen Bruchpotenzen, so wie Ausdrücke von der Form $\sqrt[m]{a^n}$, welche die Ausziehung einer Wurzel, deren Grad ein Bruch ist, fodern, Bruchwurzeln genannt werden.

Zusatz 6. Wenn nun gleich die gebrochenen — oder +exponenten keine ursprünglichen Exponenten sind: so läßt sich doch leicht beweisen, daß sowohl die im §. 37. 4. für Multiplikation und die im §. 40. 7. für Division, als auch obige Regeln des Potenzirens (§. 53.) und des Wurzelausziehens (§. 54.), wie für ganze +exponenten, so auch für gebrochene — und +exponenten gültig seyen. Nämlich:

1. Es ist $a^m . a^{\frac{n}{s}} = a^m . \sqrt[s]{a^n} = \sqrt[s]{a^{ms} . a^n}$ (Zus. 3.) $= \sqrt[s]{a^{ms+n}}$ (§. 37. 4.) $= a^{\frac{ms+n}{s}}$ (§. 54.) $= a^{m+\frac{n}{s}}$, was dieselbe Multiplikationsregel (§. 37. 4.) sogleich gegeben hätte. Eben so ist $a^{\frac{t}{v}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[v]{a^t} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nv]{a^{nt}} \cdot \sqrt[nv]{a^{mv}}$ (§. 52. Zus. 3.) $= \sqrt[nv]{a^{nt} . a^{mv}}$ (§. 54.) $= \sqrt[nv]{a^{nt+mv}}$ (§. 37. 4.) $= a^{\frac{nt+mv}{nv}} = a^{\frac{t}{v}+\frac{m}{n}}$.

2. Man habe nun $a^{\frac{m}{n}})^v$, so ist dieses, wie $a^m)^v$, nichts anderes, als setzen $\sqrt[n]{a^m} . \sqrt[n]{a^m} \ldots$ oder $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{m}{n}} \ldots$ vmal, d. i. nach 1. $a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots \text{vmal}} = a^{\frac{m}{n} . v} = a^{\frac{mv}{n}}$, was auch unsere Potenzirungsregel ausspricht. Da aber auch $a^{\frac{mv}{n}} = a^v)^{\frac{m}{n}}$ ist: so sieht man, daß auch $a^{\frac{t}{v}})^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mt}{nv}}$ seyn müsse.

3. Man weiß schon aus §. 40. Zus. 4., daß der ganze —exponent eines Faktors keine Abänderung unserer ursprünglichen Multiplikationsregel hervorbringe, daß folglich vermöge 1. auch $a^{-m} . a^{\frac{n}{s}} = a^{\frac{n}{s}-m} = a^{\frac{n-ms}{s}}$ sey. Dasselbe gilt, wenn man $-\frac{n}{s}$ setzt. Es ist näm-

lich $a^{-m} . a^{-\frac{n}{s}} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{s}$ (Zuſ. 4.) $= \frac{1}{\sqrt[s]{a^{ms} . a^n}}$ (Zuſ. 3.) $= \frac{1}{\sqrt[ms+n]{a^{s}}} = a^{\frac{-ms-n}{s}}$ (Zuſ. 4.) $= a^{-m-\frac{n}{s}}$.

Eben ſo iſt auch $a^{-\frac{t}{v}} \times a^{-\frac{n}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{t}{v}} . a^{\frac{n}{s}}} = \frac{1}{a^{\frac{t}{v}+\frac{n}{s}}}$

(nach 1.) $= a^{-\frac{t}{v}-\frac{n}{s}} = a^{-\frac{ts+nv}{sv}}$.

4. Aus 3. iſt klar, daß der Beweis in 2. derſelbe bleibe, wenn man in $a^{\frac{m}{n}})^v$ ſetzt $a^{-\frac{m}{n}}$, oder daß $a^{-\frac{m}{n}})^v$ $= a^{-\frac{mv}{n}}$ und demnach auch $= a^{v})^{-\frac{m}{n}}$ ſey. Wenn man daher ſtatt v ſetzt $-\frac{r}{s}$, ſo wird auch $a^{-\frac{r}{s}})^{-\frac{m}{n}}$ $= a^{\frac{rm}{sn}}$ ſeyn.

5. Man habe $\sqrt[n]{a^{\frac{t}{v}}}$ und ſetze $a^{\frac{t}{v}} = b$: ſo iſt $\sqrt[n]{a^{\frac{t}{v}}}$ $= \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ (§. 54.) $=$ (durch Subſtit.) $a^{\frac{t}{v})^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{t}{vn}}$ (nach 2.). Es ſey eben ſo $\sqrt[n]{a^{\pm\frac{t}{v}}}$ und man ſetze $a^{\pm\frac{t}{v}} = b$: ſo iſt $\sqrt[n]{a^{\pm\frac{t}{v}}} = \sqrt[n]{b} = \sqrt[m]{b^n}$ (§. 52. Zuſ. 3.) $= \sqrt[m]{b^n}$ $= b)^{\frac{n}{m}} =$ (durch Subſtit.) $a^{\pm\frac{t}{v})^{\frac{n}{m}}} = a^{\pm\frac{tn}{vm}}$ (nach 4.) $= a^{\frac{t}{v})^{\pm\frac{n}{m}}}$, was die Regel ſogleich gegeben hätte, der Exponent der Wurzel ſey $+$ oder $-\frac{m}{n}$. Daher denn auch $\sqrt[n]{a^{-\frac{t}{v}}} = a^{\frac{-nt}{mv}}$.

6. $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{v}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{a^v} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^{nv}}}$ (§. 24. VI. 3)) $= \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^{nv}}}$ (Zuf. 3.) $= \sqrt[n]{a^{m-nv}}$ (§. 40. 7.) $= a^{\frac{m}{n}-v}$ (§. 54.). Auf gleiche Art erhellt auch, daß umgekehrt $\frac{a^v}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{v-\frac{m}{n}}$ sey. Es wird daher auch $\frac{a^{\frac{t}{v}}}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{t}{v}-\frac{m}{u}}$ seyn.

Eben so ist $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^v} = \frac{1}{a^v \sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m . a^{nv}}} = \frac{1}{a^{\frac{m+nv}{n}}}$ $= a^{\frac{-m-nv}{n}}$ (Zuf. 4.) $= a^{-\frac{m}{n}-v}$. Auf gleiche Art erhellt der umgekehrte Fall.

Endlich ist auch $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{t}{v}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} : \frac{1}{\sqrt[v]{a^t}} = \frac{\sqrt[v]{a^t}}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{a^{\frac{t}{v}}}{a^{\frac{m}{n}}}$ $= a^{\frac{t}{v}-\frac{m}{n}} = a^{\frac{nt-mv}{nv}}$. Da man alle diese Endausdrücke auch durch unmittelbare Anwendung unserer Divisionsregel auf die vorgegebenen Größen erhält: so ist auch die Gültigkeit dieser Regel, so wie der Regeln über Multiplikation, Potenzirung und Wurzelausziehung außer allen Zweifel gesetzt, die Exponenten der Größen, welche in den Calcul kommen, mögen die ursprünglichen, nämlich ganze +zahlen, oder die uns bisher bekannt gewordenen abgeleiteten seyn.

Anmerkung. Man wird nicht übersehen, daß sich mit der Auflösung unserer letzten Aufgabe (§. 54.) gleichsam der Cyclus der gesetzlichen arithmetischen Operationen mit den Zahlen, die wir Exponenten nennen, geschlossen habe, indem wir die wahre Bedeu-

tung der Exponenten unter der Form jeder der 4 Stammspecies, nämlich ihre Addition als Multiplikation gewisser Größen, ihre Subtraktion als Division, ihre Multiplikation als Potenzirung und ihre Division als Wurzelausziehung kennen lernten. Sollten daher die Exponenten noch unter solchen Formen erscheinen, welche auf die uns bisher bekannt gewordenen nicht zurückgeführt werden können: so wird ihre richtige Bedeutung eben da nachgewiesen werden müssen, wo sie zuerst zum Vorschein kommen.

Rechnung mit eingliedrigen Wurzelgrößen.

§. 55. Indem man vorerst nur eingliedrige Wurzelgrößen (§. 52. Erkl. 4.) den uns bekannten arithmetischen Operationen unterwirft, und die Richtigkeit der Rechnung in allgemeinen gesetzlichen Ausdrücken darstellt: erkennt man in diesen nicht nur die wahren Regeln der Rechnung, um sie, wenn man es für nothwendig erachtet, bestimmt mit Worten anzugeben, sondern man sieht sich hiedurch auch in den Stand gesetzt, eben jene Rechnungen in den 4 Stammspecies auch mit vielgliedrigen Wurzelgrößen richtig zu vollziehen.

Die hieher gehörigen Aufgaben sind folgende:

1. Ungleichnamige Wurzelgrößen gleichnamig zu machen (§. 52. 4. 1)). Das Verfahren ist ähnlich dem, Brüche auf einerley Nenner zu bringen.

Es seyen die gegebenen Wurzelgrößen $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{b^4}$. Aus $\sqrt[4]{a}$ macht man $\sqrt[4.5]{a^5}$, und aus $\sqrt[5]{b^4}$ macht man $\sqrt[5.4]{b^{4.4}}$; so hat man die gleichnamigen Wurzelgrößen $\sqrt[20]{a^5}$, $\sqrt[20]{b^{16}}$, ohne den Werth der einzelnen Wurzelgrößen verändert zu haben (§. 52. Zus. 4.). So ist allgemein $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[s]{a^r}$ eben das, was $\sqrt[ns]{a^{ms}}$, $\sqrt[ns]{a^{nr}}$ ist. Auf demselben Grunde beruht die Umformung der Wurzelgrößen $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$, $\sqrt[8]{a^7}$ in die gleichnamigen: $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

2. Einerley Wurzelgrößen (§. 52. 4. 1)) zu reduziren. Dieses geschieht nach §. 31. Zus. 5. So ist $\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$, oder $4a\sqrt[n]{b}-a\sqrt[n]{b}=3a\sqrt[n]{b}$, wie für sich evident ist.

Zuweilen sind die vorgegebenen Wurzelgrößen nur scheinbar nicht kommunizirende oder verschiedene, welche man aber leicht zu einerley Wurzelgrößen umbildet. Man habe z. B. $4b\sqrt{a^3c}+6a\sqrt{ab^2c}$, so kann man dafür nach §. 54. Zus. 3.) entweder setzen: $4\sqrt{a^3b^2c}+6\sqrt{a^3b^2c}=10\sqrt{a^3b^2c}$, oder: $4ab\sqrt{ac}+6ab\sqrt{ac}=10ab\sqrt{ac}=10\sqrt{a^3b^2c}$. Eben so ist $2\sqrt{ab^5}-7b^2\sqrt[4]{a^2b^2}=-5b^2\sqrt{ab}$, indem nämlich $2\sqrt{ab^5}=2b^2\sqrt{ab}$, und $-7b^2\sqrt[4]{a^2b^2}$ durch Deprimirung (§. 52. Zus. 3.) $=-7b^2\sqrt{ab}$ ist. Eben so: $3\sqrt{3}+2\sqrt{108}=3\sqrt{3}+2\sqrt{36}.\ 3=3\sqrt{3}+2.\ 6\sqrt{3}=15\sqrt{3}$.

3. Wurzelgrößen miteinander zu multipliziren,

1) wenn sie gleichnamig sind.

Es ist $2\sqrt{a}\ .\ 3\sqrt{b}=6\sqrt{ab}$, und eben so $f\sqrt[n]{a^r b^v c^x}$. $g\sqrt[n]{a^m b^s c^y}\ .\ h\sqrt[n]{ab}=fgh\sqrt[n]{a^r b^v c^x a^m b^s c^y ab}$ (§. 54.) $=fgh\sqrt[n]{a^{m+r+1}.b^{s+v+1}c^{x+y}}$, woraus leicht die Regel erhellt. Sind 2) die Wurzelgrößen ungleichnamig: so werden sie nach 1. gleichnamig gemacht, und dann wird, wie vorhin, mit ihnen verfahren. Z. B. $-2\sqrt{xy}\ .-5\sqrt[3]{x^2y}=10\sqrt[6]{x^7y^5}=10x\sqrt[6]{xy^5}$.

4. Wurzelgrößen durcheinander zu dividiren,

1) wenn sie gleichnamig sind.

Es ist $\frac{8\sqrt[3]{a}}{2\sqrt[3]{b}}=4\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ (§. 54. Zus. 3.), und eben so

allgemein $c\sqrt[n]{a^m b} : d\sqrt[n]{a^s b^r} = \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{amb}{a^s b^r}} = \frac{c}{d}\sqrt[n]{a^{m-s} b^{1-r}}$; d. i. der Quotient aus den Coeffizienten wird neuer Coefficient; das Wurzelzeichen mit demselben Exponenten wird einmal gesetzt, und die Größen hinter dem Wurzelzeichen werden, wie gewöhnlich, durcheinander dividirt, und der Quotient wird auf das kürzeste ausgedrückt.

2) Ungleichnamige Wurzelgrößen werden nach 1. erst gleichnamig gemacht, und dann wird, wie vorhin, verfahren; z. B. $3\sqrt[6]{a^3} : -5\sqrt{ab} = 3\sqrt{a} : -5\sqrt{ab}$

$= -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{b}} = -\sqrt{\frac{9}{25}b}$.

5. Wurzelgrößen zu potenziren.

Es ist $(2\sqrt[3]{a})^2 = 2\sqrt[3]{a} \cdot 2\sqrt[3]{a} = 4\sqrt[3]{a}, a$ (§. 54.) $= 4\sqrt[3]{a^2}$, und allgemein: $(c\sqrt[n]{a^3 b^m})^r = c^r \cdot (\sqrt[n]{a^3 b^m})^r$ (§. 53.) $=$

$c^r (a^{\frac{3}{n}} b^{\frac{m}{n}})^r$ (§. 54.) $= c^r \cdot a^{\frac{3r}{n}} b^{\frac{mr}{n}}$ (§. 54. Zus. 6. 2.)

$= c^r \sqrt[n]{a^{3r} b^{mr}}$ (§. 54.); d. i. die Faktoren, zu welchen auch der durch c vorgestellte Coeffizient gehört, werden, mit Beybehaltung derselben Wurzel an ihrem Platze, nach §. 53. potenzirt.

6. Aus Wurzelgrößen jede Wurzel auszuziehen.

Es ist $\sqrt{(\sqrt{a})} = \sqrt[2.2]{a} = \sqrt[4]{a}$. Denn $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, daher $\sqrt{(\sqrt{a})}$

$= \sqrt{(a^{\frac{1}{2}})} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$ (§. 54. Zus. 6. 2.) $= \sqrt[4]{a}$. Eben so ist allgemein: $\sqrt[n]{(\sqrt[r]{a^m b})} = \sqrt[n]{(\sqrt[r]{a^m b c^r})} = \sqrt[n]{(a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{1}{r}} c^{\frac{r}{r}})}$

$= (a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{1}{r}} c^{\frac{r}{r}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{nr}} b^{\frac{1}{nr}} c^{\frac{r}{nr}} = \sqrt[nr]{a^m b c^n}$ (§. 54.)

$= \sqrt[nr]{a^m b} \cdot \sqrt[n]{c}$, oder $= \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[nr]{a^m b}$. Daß nämlich $\sqrt{}$ auch für den Faktor c gelte, weiß man schon aus §. 54., weßwe-

gen man jene gegebene Größe sogleich so hätte setzen können: $\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{(\sqrt[r]{a^m b})}$.

Zusatz. Diese Auflösung unserer Aufgabe zeigt 1) das Entstehen solcher Wurzelgrößen, die wir im §. 52. Erkl. 4. 3) zusammengesetzte nannten; 2) daß umgekehrt $\sqrt[4]{a}$, oder $\sqrt[6]{a}$ wieder $= \sqrt{(\sqrt{a}$, oder $= \sqrt[3]{(\sqrt{a} = \sqrt{(\sqrt[3]{a}$ sey, wie man daher bisweilen aus einer vorgegebenen Zahl die Wurzel höheren Grades, als vom 2. oder 3. Grade, bloß mit Hilfe der Kenntniß der Ausziehung der Wurzeln letzterer Grade auffinden könne. So ist z. B. $\sqrt[6]{117649} = \sqrt{(\sqrt[3]{117649} = \sqrt{49} = 7$, oder $\sqrt[3]{(\sqrt{117649} = \sqrt[3]{343} = 7$. Eben so ist $\sqrt[9]{390625} = \sqrt[2.2.2]{\ldots} = \sqrt[4]{(\sqrt{390625)} = \sqrt[4]{625} = \sqrt{(\sqrt{625} = \sqrt{25} = 5$.

§. 56. Erklärung. Potenzen mit geraden Exponenten heißen gerade, oder paarige, wie a^2, a^4, $a^6 \ldots a^{2n}$; sonst ungerade, unpaarige, wie a^3, $a^5, \ldots a^{2n+1}$ (§. 49. Zus. 2.).

Eben so ist $\sqrt[2n]{a}$ für die gerade und $\sqrt[2n+1]{a}$ für die unpaarige Wurzel die allgemeine Form.

§. 57. Lehrsatz. I. Jede gerade Potenz aus einer + oder —wurzel erhält nur das Zeichen + (ist nur eine positive oder +potenz), d. i. $(\pm a)^{2n} = +a^{2n}$. II. Jede ungerade Potenz hat das Zeichen der Wurzel, d. i. $(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}$.

Beweis. Für (+a) oder (a) erhellt sowohl von I., als II., die Wahrheit von selbst.

Soll aber (—a) potenzirt werden, so ist dieses nach §. 52. nichts anders, als setzen: —a.—a .... 2nmal, oder (2n+1)mal, und hieraus das Produkt zu erzeugen. Ordnet man nun diese —faktoren paarweise: so hat man im ersten Falle, wo zur 2nten oder geraden

Potenz erhoben werden soll, $\frac{2n}{2}$, d. i. n oder eine gerade Anzahl solcher Paare von Faktoren (wie $(-a \times -a)$), welche miteinander zu multipliziren sind. Allein jedes dieser Paare ist $= +a^2$, und das Produkt aus allen diesen ($+a^2$), als die gesuchte 2nte Potenz, erhält nur das Zeichen +, was in Beziehung auf I. zu beweisen war.

Im zweyten Falle, wo $(-a)$ zur $(2n+1)$ten Potenz zu eleviren ist, hat man nebst jener n Paare von Faktoren noch einen Faktor $= -a$. Wenn man daher das +produkt aus diesen n Paaren noch mit $-a$ multiplizirt: so wird das Produkt oder die gesuchte $(2n+1)$te Potenz von $-a$ nothwendig —, oder negativ, d. i. diese Potenz erhält das Zeichen der Wurzel, was für II. noch zu beweisen war.

Zusatz 1. Also $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$, d. h. jede gerade Wurzel aus einer +potenz kann eine + oder —wurzel seyn. So ist $\sqrt{a^2} = \pm a$; $\sqrt{4} = \pm 2$ für den Fall nämlich, daß man nicht weiß, ob a^2 oder 4 aus $(+a)^2$, $(+2)^2$, oder aus $(-a)^2$, $(-2)^2$ entsprungen sey.

Wenn aber diese Zweydeutigkeit nicht obwaltet, so erhält die gerade Wurzel aus einer +potenz nur ein Zeichen, und zwar dasjenige, welches die Stammgröße hatte, aus der die Potenz erzeugt wurde. So ist z. B. $\sqrt{(-a^2 . -a^2)} = -\sqrt{a^4} = -a^2$ und nicht $= +a^2$, wie $\sqrt{4}$ nicht $= +2$ ist, wenn man weiß, daß +4 aus $-2 . -2$ entstanden ist.

Zusatz 2. Es ist also $\sqrt{-a}$ oder allgemein $\sqrt[2n]{-a}$ eine unmögliche Wurzel oder imaginäre Größe; aber $\sqrt[2n]{a}$ und $\sqrt[2n+1]{\pm a} = \pm\sqrt[2n+1]{\pm a}$ bezeichnen mögliche Größen. So ist $\sqrt[3]{-27} = -3 = -\sqrt[3]{27}$.

Die einfache (§. 52. 4. 3)) imaginäre Größe $\sqrt{-a}$ wird auch, da $-a = a \times -1$, folglich $\sqrt{(a \times -1)} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$ (§. 54.) ist, gewöhnlich durch $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ vorgestellt. Wenn daher m jede ganze Zahl > 1 bedeutet: so stellt $\sqrt[2m]{-a}$ jede zusammengesetzte unmögliche Wurzelgröße vor. Eine solche ist z. B. $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$.

Zusatz 3. $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{(\sqrt{-a})} = \sqrt[n]{(\sqrt{-a})}$, d. i. jede imaginäre Wurzel kann betrachtet werden entweder als eine Quadratwurzel aus einer möglichen oder unmöglichen Größe, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; oder als Wurzel jeden Grades aus einer unmöglichen Größe.

§. 58. Lehrsatz. Die Unmöglichkeit verschwindet, wenn man eine einfache unmögliche Größe 1. mit einer einfachen unmöglichen Größe multiplizirt, 2. durch eine unmögliche Größe dividirt.

Beweis für 1. Es ist $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.-1$ (§. 55. 3.) $= -\sqrt{1} = -1$ (§. 57. Zus. 1.). Dasselbe erhellt auch so: $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}.(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^1$ $= -1$ (§. 57. II.), d. i. = einer möglichen Größe.

Eben so ist $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{-a}.-b$ (§. 55. 3.) $= -\sqrt{ab}$ (§. 57. Zus. 1.), d. i. gleich einer möglichen Größe. Dasselbe erhellt auch aus dem Vorigen, nämlich: $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$ und $\sqrt{-b} = \sqrt{b}\sqrt{-1}$ (§. 57. Zus. 2.); daher $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{ab}\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$.

Beweis für 2. Es ist $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$ (§. 40. 4.),

und $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{-a}{-b}}$ (§. 55. 4.) $= \sqrt{\frac{a}{b}}$ (§. 57. Zus. 1.).

Dasselbe erhellt auch so: $\frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \times 1 = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Zusatz 1. Die Ausdrücke $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ und $\frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}}$ $= \sqrt{-b}$ (nach dem Vorigen) zeigen klar, daß eine mögliche Größe mit einer unmöglichen multiplizirt oder dividirt, gleich sey einer unmöglichen Größe.

Zusatz 2. Ob hinsichtlich zusammengesetzter imaginärer Wurzelgrößen die Unmöglichkeit verschwinde, oder nicht, entscheidet man leicht entweder durch die bloße Theorie, oder durch die Auflösung der gegebenen Größen in gleiche unter der einfachen Form. Man habe z. B. $\sqrt[4]{-a} . \sqrt[4]{-a}$, so kann man diesen Ausdruck entweder als Potenzirung, d. i. wie $\sqrt[4]{-a})^2$, oder als Multiplikationsausdruck betrachten. Im ersten Falle weiß man vermöge §. 52. Zus. 3. sogleich, daß bey vorgenommener Deprimirung $\sqrt[4]{-a})^2 = \sqrt{-a}$, d. i. = einer unmöglichen Größe sey. Im zweyten Falle hat man zunächst nach §. 55. 3. $\sqrt[4]{-a} . \sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{a^2}$, was also eine mögliche Größe zu seyn scheint; allein zersetzt, wird $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2})} = \sqrt{(-a)}$ (nach §. 57. Zus. 1.) $= \sqrt{-a}$. Denselben wahren Ausdruck erhält man auch durch die Auflösung der gegebenen Größen in gleiche von einfacher Form. So ist $\sqrt[4]{-a} . \sqrt[4]{-b} = \sqrt{(\sqrt{-a})} . \sqrt{(\sqrt{-b})} = \sqrt{(\sqrt{a}\sqrt{-1})} . \sqrt{(\sqrt{b}\sqrt{-1})}$ = (nach §. 55. 3.) $\sqrt{[\sqrt{a}\sqrt{-1} . \sqrt{b} . \sqrt{-1}]} = \sqrt{[\sqrt{ab} . -1]}$ $= \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{-1}}$ (§. 54.) $= \sqrt[4]{ab}\sqrt{-1}$, d. i. = einer unmöglichen Größe.

Auch ist $\sqrt[6]{-a} . \sqrt[6]{-a} = \sqrt[6]{-a})^2 = \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$, d. i. gleich einer möglichen Größe. Eben so auch $\sqrt[6]{-a} . \sqrt[6]{-b} = \sqrt[3]{\sqrt{-a} . \sqrt[3]{\sqrt{-b}}} = \sqrt[3]{[\sqrt{-a} . \sqrt{-b}]} = \sqrt[3]{(-\sqrt{ab})}$ $= -\sqrt[6]{ab}$.

Aehnliches gilt hinsichtlich der Division. So ist $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt[4]{-a}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{(\sqrt{-a})}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{-a})^2}}{\sqrt{(\sqrt{-a})}}$ (§. 24. Ax. VI. 3.) $= \sqrt{\frac{(\sqrt{-a})^2}{(\sqrt{-a})}}$ (§. 55. 4.) $= \sqrt{(\sqrt{-a})} = \sqrt[4]{-a}$, wie man bereits aus Obigem weiß.

Diese Beyspiele zeigen, daß man diesen Calcul mit imaginären Wurzelgrößen äußerst behutsam und nur mit Berücksichtigung des §. 57. anstellen müsse, um falsche Resultate zu vermeiden. So zeigt obiges Beyspiel $\sqrt[4]{-a)^2}$ oder $(-a)^{\frac{2}{4}}$, daß der Satz §. 54. Zus. 1. nur unter der eben da angedeuteten Beschränkung wahr sey. Diese Ausdrücke sagen nämlich zunächst, man solle die 4. Wurzel aus $-a$ zur 2. Potenz erheben, wodurch man $\sqrt{-a}$ oder $(-a)^{\frac{1}{2}}$ erhält. Würde man aber Jenes als gleichbedeutend mit dem nehmen: man solle erst $-a$ zur 2. Potenz eleviren, und dann die 4. Wurzel ausziehen, so könnte man sich leicht verführt finden, $\sqrt[4]{a^2}$ oder $\sqrt{a}$ für das wahre Resultat zu nehmen.

Zusatz 3. Weil $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ ist: so ist $+1 = -\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$, daher denn $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$; $\frac{1}{-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, und $\frac{-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$; welche Ausdrücke für die Rechnung wohl zu bemerken sind.

Weil ferner $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1 = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{(-1)^{\frac{1}{2}}} = -(1)^o$ ist, so ist auch $-1)^o = +1$, wie es nach §. 57. 1. seyn muß, da o eine gerade Zahl ist (§. 49. Zus. 3.).

§. 59. Lehrsatz. Alle geraden Potenzen von einer einfachen unmöglichen Größe unter der Form $a\sqrt{-1}$ sind mögliche, alle ungeraden

Potenzen von eben dieser Form sind unmögliche Größen.

Beweis. 1. $(a\sqrt{-1})^{2n} = a^{2n} . (-1^{\frac{1}{2}})^{2n} = a^{2n} . (-1)^{\frac{2n}{2}} = a^{2n} . (-1)^n = a^{2n} . \pm 1$ (§. 57.) $= \pm a^{2n}$, d. i. gleich einer möglichen Größe.

2. Aber $(a\sqrt{-1})^{2n+1} = a^{2n+1} . (-1^{\frac{1}{2}})^{2n+1} = a^{2n+1} . (-1)^{\frac{2n+1}{2}} = a^{2n+1} . (-1)^{n+\frac{1}{2}} = a^{2n+1} . (-1)^n . (-1)^{\frac{1}{2}} = a^{2n+1} . \pm 1 . \sqrt{-1} = \pm a^{2n+1} \sqrt{-1}$, d. i. gleich einer unmöglichen Größe.

Zusatz 1. Im ersten Falle gilt also das obere Zeichen, wenn n selbst wieder eine gerade Zahl, 2n also ein Vielfaches von 4 ist; das untere Zeichen — aber gilt, wenn n eine ungerade, 2n folglich eine bloß durch das einfache 2 theilbare Zahl ist. Daher ist $(a\sqrt{-1})^2 = -a^2$; $(a\sqrt{-1})^4 = +a^4$; $(a\sqrt{-1})^6 = -a^6$, u. s. w.

Im zweyten Falle ist das obere Zeichen + gültig, wenn n selbst wieder eine gerade, daher 2n+1 eine Zahl von der Form 4c+1 ist, was auch c für eine ganze Zahl seyn mag; aber das untere Zeichen gilt, wenn n ungerade, daher 2n+1 eine Zahl lediglich von der Form 2c+1 ist. So ist $(a\sqrt{-1})^3 = -a^3\sqrt{-1}$; $(a\sqrt{-1})^5 = +a^5\sqrt{-1}$; $(a\sqrt{-1})^7 = -a^7\sqrt{-1}$, u. s. w.

Zusatz 2. Setzt man $a = 1$, so ist $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = -1$, wie man schon weiß; $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^4 = \sqrt{-1} . \sqrt{-1} . \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = -1 . -1 = +1$, u. s. w.

Hieran hat man ein leichtes Mittel, sogleich zu erkennen, ob ein Produkt aus 3, 4 und mehreren imaginären Größen eine mögliche oder unmögliche Größe, und welches Zeichen ihm zu geben sey. So ist $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} . \sqrt{-c} = \sqrt{a}\sqrt{-1} . \sqrt{b}\sqrt{-1} . \sqrt{c}\sqrt{-1} = -\sqrt{abc}\sqrt{-1}$; aber $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} . \sqrt{-c} . \sqrt{-d} = +\sqrt{abcd}$, u. s. w.

Zusatz 3. Wenn m und n ganze +zahlen bezeichnen: so weiß man aus dem Vorausgehenden, daß

$$+1 = 1^m = +\sqrt[m]{1} = 1^{-m} = 1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[-m]{1} = -1)^0$$
$$= -\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^{4n}, \text{ und daß } -1 = -1)^{2n+1}$$
$$= \sqrt[2n+1]{-1} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} \text{ sey.}$$

Anmerkung. Lambert (in seiner Architekt. §. 163.) vergleicht jenes Verschwinden der Unmöglichkeit mit dem Sprachausdrucke »das morgende Gestern«, wodurch der reelle Begriff von Heute bezeichnet wird, ungeachtet es etwas Unmögliches ist, wenn man im gegenwärtigen Augenblicke behaupten wollte, daß der gestrige Tag auch zugleich der morgende sey. Man kann sich übrigens leicht überzeugen, daß die unmöglichen Größen, wie die Forschung nach denselben und ihre Darstellung, im Gebiete der Mathematik nicht zu vermeiden seyen. Man habe z. B. die Aufgabe zu lösen, eine Zahl zu finden, deren Würfel gleich 1 oder gleich 8, daß nämlich $x^3 = 1$ oder $x^3 = 8$ eine wahre Gleichung sey. Man erkennt nun zwar sogleich, daß +1 und +2 solche Zahlen seyen, welche jener Frage Genüge leisten, indem $+1)^3 = 1$ und $+2)^3 = 8$ ist. Allein man setze, die Theorie fodere, daß man für x 3 Werthe finden müsse, gleichviel ob mögliche (reelle) oder unmögliche: so sieht man sich gezwungen, noch die 2 übrigen Werthe zu erforschen und darzustellen.

§. 59. Erklärung. Eine Zahl, welche weder von der Einheit, weder von einem aliquoten Theile der Einheit gemessen wird, deren Verhältniß also zur Einheit nicht genau angegeben werden kann, ist eine Irrationalzahl (unausrechenbare Zahl, num. irrationalis, s. surdus, s. transcendens, s. incommensurabilis). Hingegen heißt jede durch die Einheit oder in Theilen der Einheit ausdrückbare Zahl eine Rationalzahl, dergleichen die ganzen oder gebrochenen Zahlen sind. So ist von $\frac{3}{4}$ genau das Verhältniß des Bruches zum 4ten Theil der Einheit bestimmt.

§. 60. Lehrsatz. Jede Potenz $\frac{b^n}{a^n}$ eines un-

ächten auf den kürzesten Ausdruck gebrachten Bruches $\frac{b}{a}$, woraus eine gemischte Zahl entspringt, ist wieder nur eine gemischte Zahl.

Beweis. Ein ächter Bruch kann $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ nicht werden, weil die nte Potenz der (ex hypoth.) größeren Zahl b nothwendig größer wird, als dieselbe Potenz der kleineren Zahl a. Aber $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ kann auch keine ganze Zahl werden. Denn wäre $\frac{b^n}{a^n}$ eine ganze Zahl: so müßte a^n die Größe b^n, folglich auch a die Größe b^n (§. 42. Zus. 4.) messen, was unmöglich ist, indem der Voraussetzung gemäß a kein Maß von b ist, b^n aber keine anderen Faktoren als b enthält.

§. 61. Lehrsatz. Wenn die nte Wurzel aus einer ganzen Zahl zwischen 2 unmittelbar aufeinanderfolgende ganze Zahlen x und $x+1$ fällt: so giebt es keinen Bruch, der zur kleineren Zahl x gesetzt, die Wurzel aus p genau ausdrückt.

Beweis. Es sey dieser Bruch $\frac{c}{d}$: so wäre $\sqrt[n]{p} = x + \frac{c}{d} = \frac{b}{a}$, indem man jene gemischte Zahl auf den kürzesten Ausdruck gebracht denkt. Also müßte $\frac{b^n}{a^n} = p =$ einer ganzen Zahl seyn, gegen §. 60.

Zusatz 1. Also kann eine Wurzel, die zwischen 2 um 1 unterschiedene ganze Zahlen fällt, oder die Wurzel aus einer unvollkommenen Potenz nur näherungsweise berechnet werden, welches am besten mittels der

Decimalbrüche geschieht (§§. 120. 121. d. Z.). Oder jede Wurzel aus einer unvollkommenen Potenz ist eine Irrationalzahl (§. 59.). Andere Näherungsmethoden kommen unten (§. 69.) vor.

Zusatz 2. Da man also die algebraischen Wurzelgrößen (§. 52. Erkl. 4. 3)) auch als algebraische Irrationalgrößen betrachten kann: so zeigen die oben §. 54. Zus. 3. dargestellten Umformungen, wie man jene Größen zum Theile von ihrer Irrationalität befreyen könne. Wie aber $\sqrt[3]{a^5b^6c} = ab^2\sqrt[3]{a^2c}$ ist: so ist auch $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{8.2} = 2\sqrt[5]{2}$, und $\sqrt{3887} = \sqrt{13^2.23} = 13\sqrt{23}$, u. s. w. Hieraus erhellt, wie man auch numerische Irrationalausdrücke durch Resolution der nach dem Wurzelzeichen gesetzten Zahl in solche Faktoren, aus welchen sich die Wurzel des angezeigten Grades genau ausziehen läßt, zum Theile von der Irrationalität befreyen könne; was man immer versucht, bevor man es unternimmt, den Werth der Wurzel durch Näherung zu bestimmen.

Anmerkung. Man darf die Irrationalgröße nicht mit den imaginären oder unmöglichen Größen verwechseln; wie a, b, c . . . so sind auch $\sqrt{a}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, . . . gleich reelle oder mögliche Größen. So zeigt sich z. B. in der Geometrie, daß, wenn man jeden Cathetus des rechtwinklichen Dreyecks $= 1$ setzt, die Hypothenuse, als reelle, konstruirte Größe, $= \sqrt{2}$ werde.

§. 62. Aufgabe. Eingliedrige Irrationalgrößen zu transformiren.

1. Jede Irrationalgröße $\sqrt[n]{b}$ in einen gleichen Bruch mit beliebigem rationalen Nenner zu verwandeln.

Auflösung. $\sqrt[n]{b} = \frac{a\sqrt[n]{b}}{a} = \frac{\sqrt[n]{a^n b}}{a}$.

2. Einen irrationalen Bruch in einen gleichen Bruch mit rationalem Nenner oder Zähler zu verwandeln, und umgekehrt.

Auflösung. $\sqrt{\frac{b}{c}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}.\sqrt{c}}{\sqrt{c}.\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{bc}}{c}$, und allgemein $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$. Ferner ist $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}.\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{c}} = \frac{b}{\sqrt{bc}}$, und allgemein $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{n-1}b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$. So ist $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$, und $\sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \frac{5}{\sqrt[3]{3^2.4}} = \frac{5}{\sqrt[3]{36}}$.

Ferner ist $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3.5}{5.5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, und $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt[6]{2^2}.\sqrt[6]{2^3}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2^5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{32}$.

Umgekehrt ist $\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}$, und $\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b}}$ $= \sqrt[n]{\frac{a^n}{b}}$. So ist $\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ und $\frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$.

Eben so ist $\frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$.

Die Beweise dieser Auflösungen beruhen der Hauptsache nach auf den für den Calcul mit Wurzelgrößen gegebenen Regeln, weßwegen man kaum die von uns weggelassene Citate vermissen wird.

Rechnung mit mehrnamigen Wurzelgrößen.

§. 63. Aufgabe. Die vier Stammspecies auf gegebene mehrgliedrige, theils irrationale, theils imaginäre Größen anzuwenden.

Einige Beyspiele genügen, um die auf obigen Fun-

damenten (besonders des §. 55.) beruhende Auflösung nachzuweisen.

1. Addition und Subtraktion.

Beyspiel. $2a\sqrt{bc} - 5b\sqrt{d} + c\sqrt{-f}$
$\pm (a\sqrt{bc} - b\sqrt{d} + 3c\sqrt{-f})$

Summe $= 3a\sqrt{bc} - 6b\sqrt{d} + 4c\sqrt{-f}$
Differ. $= a\sqrt{bc} - 4b\sqrt{d} - 2c\sqrt{-f}$.

2. Multiplikation.

Beyspiele. 1). $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, d. i. der Unterschied zweyer Größen kann allgemein (vergl. §. 38. Zus. 4.) als Unterschied zweyer Quadrate betrachtet werden, welcher entsteht, wenn man die Summe der Quadratwurzeln jener Größen mit ihrer Differenz multiplizirt. So ist $1 = 3 - 2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

2). $2a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$
$2a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$
$4a^2b - 2ac\sqrt{bd}$
$- 2ac\sqrt{bd} + c^2d$
$4a^2b - 4ac\sqrt{bd} + c^2d$.

3). $3\sqrt{a} + \sqrt{-b^2} (= b\sqrt{-1})$
$3\sqrt{a} - \sqrt{-b^2}$
$9a + 3\sqrt{-ab^2}$
$- 3\sqrt{-ab^2} + b^2$
$9a \quad * \quad + b^2$.

3. Division.

Beyspiele. 1). $\dfrac{\sqrt{24} + \sqrt{48} - \sqrt{72}}{\sqrt{6}} = 2 + \sqrt{8} - \sqrt{12}$
$= 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.

2). $\dfrac{c^2\sqrt{cd} - f\sqrt{cf} - c\sqrt{df}}{-\sqrt{c}} = -c^2\sqrt{d} + f\sqrt{f} + \sqrt{cdf}$.

3). $\sqrt{(36 - 4a^2)} : \sqrt{\dfrac{3-a}{2}} = \sqrt{\dfrac{(36-4a^2)2}{3-a}} = \sqrt{\dfrac{4(9-a^2)2}{3-a}}$
$= 2\sqrt{2}(3 + a)$ (§. 38. Zus. 4.).

4). $\begin{array}{l} c\sqrt{bc} - c\sqrt{bd} + d\sqrt{cm} - d\sqrt{dm} \\ + c\sqrt{bc} - c\sqrt{bd} + d\sqrt{cm} - d\sqrt{dm} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \Big| \begin{array}{l} \sqrt{c} - \sqrt{d} \\ \hline c\sqrt{b} + d\sqrt{m} \end{array}$

5. Man habe $\frac{4\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$; indem man Zähler und Nenner mit $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ multiplizirt, befreyt man den Divisor von den Wurzelgrößen und erhält:

$$\frac{12\sqrt{14}+9\sqrt{10}-8\sqrt{21}-b\sqrt{15}}{6} = 2\sqrt{14}+\tfrac{3}{2}\sqrt{10}-\tfrac{4}{3}\sqrt{21}-\sqrt{15}.$$

Anmerkung. Gehören gleich derley Transformationen eigentlich in das Gebiet der höheren Analysis: so lehrten doch auch ältere Mathematiker schon solche Kunstgriffe; z. B. Jacob Peletarius (Cenomanus, ein Mathematiker des 16. Jahrh.) lehrte in seinem Buche »de occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, libri duo« einen Bruch von seinem trinomischen irrationalen Nenner $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ dadurch zu befreyen, daß man diesen zuerst mit $a+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ und das erhaltene Produkt noch mit $a^2+b-c-2a\sqrt{b}$ multiplizire, wodurch denn die irrationalen Größen wirklich verschwinden. (Vergl. Kästner's Gesch. d. Mathem. 2. B. S. 720.)

§. 64. Aufgabe. Einen Bruch mit irrationalem Nenner in einen gleichen mit rationalem Nenner, und umgekehrt, zu verwandeln.

Die Auflösung dieser Aufgabe (als Fortsetzung des §. 62.) wird nun aus §. 63. leicht verständlich.

1. Es sey allgemein der Bruch $\frac{Z}{a\pm\sqrt{b}}$ oder $\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ zu transformiren. Indem man nun sowohl Zähler als Nenner mit $a\mp\sqrt{b}$, oder mit $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ multiplizirt, hat man $\frac{Z}{a\pm\sqrt{b}} = \frac{Z(a\mp\sqrt{b})}{(a\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{b})} = \frac{Z(a\mp\sqrt{b})}{a^2-b}$, und eben so:

$$\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{Z(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})} = \frac{Z\sqrt{(a\mp\sqrt{b})}}{a-b} \text{ (§. 63. 2.).}$$

Ist, wie wir bereits in der vorigen Anmerkung anführten, der Nenner dreygliedrig, z. B. $a+\sqrt{b}-\sqrt{c}$: so macht man auch eine Irrationalgröße verschwinden, wenn man mit dem Nenner $a-\sqrt{b}+\sqrt{c}$ multiplizirt. Man erhält nämlich

$$\frac{Z(a-\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(a^2-x-y)-2\sqrt{xy}} = \frac{Z(a-\sqrt{b}+\sqrt{c})(a^2-x-y-2\sqrt{xy})}{(a^2-x-y)^2-4xy}.$$

2. Auf gleiche Weise hat man statt $\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{n}$

$$= \frac{a-b}{n(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}, \text{ u. s. w.}$$

Beyspiele. 1). $\frac{3}{5-2\sqrt{2}} = \frac{3(5+2\sqrt{2})}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})}$

$$= \frac{3(5+2\sqrt{2})}{5^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{3(5+2\sqrt{2})}{25-8} = \frac{3}{17}(5+2\sqrt{2}).$$

2). $\frac{9\sqrt{7}-\sqrt{3}}{3\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{(9\sqrt{7}-\sqrt{3})(3\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(3\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$

$$= \frac{192-12\sqrt{21}}{63-3} = \frac{16-\sqrt{21}}{5}.$$

3). $\frac{4}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} = \frac{4\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(4\sqrt{(3-\sqrt{5})}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

$$= \frac{4\sqrt{[(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2]}}{9-5} = \frac{4\sqrt{(12+4\sqrt{5})}}{4} = \sqrt{4(3+\sqrt{5})}$$

$$= 2\sqrt{(3+\sqrt{5})}.$$

4. $\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{69} = \frac{(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}{69(2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}$

$$= \frac{24-12+12\sqrt{6}-18}{69(2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2})} = \frac{6(2\sqrt{6}-1)}{69(2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1)}{23(2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{6}+1)}$$

$$= \frac{2(24-1)}{23(24-9\sqrt{2}+10\sqrt{3}+2\sqrt{6})} = \frac{1}{12-\frac{9}{2}\sqrt{2}+5\sqrt{3}+\sqrt{6}}.$$

II.

Von den Potenzen und Wurzeln mehrgliedriger Größen.

§. 65. Aufgabe. Eine zweygliedrige Größe (*quantitatem binomiam*) zur Potenz, deren Exponent eine ganze + zahl ist, zu erheben.

Auflösung. Man setze diese Größe $a+b$ so oft durch Multiplikation mit sich selbst, als der Exponent der verlangten Potenz anzeigt, oder was dasselbe ist, man multiplizire die nächstvorhergehende Potenz nochmals mit der Wurzel, um immer die nächst höhere Potenz zu erhalten.

Auf diese Art ist

$(a+b)^2=(a+b)\,(a+b)=$

$a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=(a+b)^3\,(a+b)=(a+b)^2\,(a+b)^2=$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=(a+b)^4\,(a+b)=(a+b)^3\,(a+b)^2=$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b)^6=(a+b)^5(a+b)=(a+b)^3\,(a+b)^2=$

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

u. s. w.

Der Beweis erhellt aus der Erklärung von Potenz.

Zusatz 1. Reflektirt man hier

1) auf die Exponenten von a und b: so findet man, daß beyde die natürlichen Zahlen, vom Exponenten der jedesmaligen Potenz von $a+b$ an bis zu o, aber in umgekehrter Aufeinanderfolge, sind, indem z. B. $a^3=a^3b^0$, und $b^3=a^0b^3$, u. s. w.

Daß diesem Gesetze die Exponenten von a und b folgen, zu welcher Potenz auch die Binomialgröße erhoben werden mag, ist aus der Entstehung der immer hö-

hern Potenz aus der entsprechenden nächst niedern einleuchtend.

Bedeutet daher m irgend eine ganze +zahl: so ist, wenn man vorerst die Coeffizienten noch unbestimmt läßt, sie daher mit A, B, C, . . . bezeichnet,

$(a+b)^m = a^m b^0 + Aa^{m-1}b^1 + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 \ldots + a^0 b^m$.

2) Reflektirt man auf die Anzahl der Glieder einer Potenz von a+b: so findet sich die Anzahl α) um 1 größer, als der Exponent der fraglichen Potenz, β) daher ungerade, oder man hat ein mittleres Glied, wenn der Exponent der Potenz gerade ist, und umgekehrt, in welchem Falle man 2 mittelsten Glieder hat. Dieses folgt aus 1), indem man so viele Glieder erhält, als die Zahl der Exponenten von o an bis m anzeigt.

3) Reflektirt man auf die Coeffizienten: so erhellt bald, daß, weil das Erheben von a+b zu irgend einer Potenz nichts ist, als ein wechselseitiges Multipliziren derselben Faktoren a und b ineinander, die Glieder, worin gleiche Potenzen von a und b vorkommen, nothwendig einerley Coeffizienten haben, und zwar bestimmt, diejenigen Glieder, die entweder vom mittleren oder den 2 mittelsten, die selbst nur einerley Coeffizienten haben können, gleichweit entfernt sind. So weiß man nun nach 2) und 3), daß z. B. in $(a+b)^8$ das 5te Glied das mittlere sey, und daß 1tes und 9tes; 2tes und 8tes; 3tes und 7tes; 4tes und 6tes Glied einerley Coeffizienten haben. Eben so weiß man schon zum voraus, daß in $(a+b)^9$ das 5te und 6te Glied einerley Coeffizienten haben, und daß die Coeffizienten der nach dem 6ten folgenden Glieder wieder rückwärts dieselben sind, wie für die 4 ersten.

Wüßte man also die Coeffizienten der ersten Glieder mit Einschluß des mittleren oder eines der mittelsten:

so könnte man, ohne nach unserer Auflösung verfahren zu müssen, die Binomialgröße $a+b$ zu jeder beliebigen Potenz erhoben darstellen.

4) Diese Coeffizienten aber der Glieder einer solchen Potenz B zu finden, ist leicht, sobald die Glieder der nächstniedern Potenz A gegeben sind. Denn da die Glieder der nächsthöheren Potenz B dadurch entstehen, daß man die von A nochmals mit der Wurzel $a+b$ multiplizirt: so ist die Summe der Coeffizienten der 2 ersten Glieder von A der Coeffizient des zweyten Gliedes von B. Denn indem man das 2te Glied von A mit a und dann das 1te auch mit b multiplizirt: so erhält man homogene Größen, die in den Coeffizienten auf eine reduzirt, das zweyte Glied von B geben. So geht es mit jedem folgenden Gliede von B bis zum mittleren oder einem der mittelsten in Ansehung der Coeffizienten.

Soll man demnach z. B. die 7te Potenz von $a+b$ finden, so muß man 8 Glieder, also 2 mittelsten, das 4te und 5te, haben; folglich ist $(a+b)^7 = a^7 + (1+6)\, a^6b + (6+15)\, a^5b^2 + (15+20)\, a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 6ab^6 + b^7$.

5) Man setze nun, die oben in 2) zu den Gliedern der Potenz $(a+b)$ gehörigen Coeffizienten wären allgemein ausgedrückt folgende bestimmte:

$$0)\ 1,\ \frac{m}{1},\ \frac{m.\,m-1}{1\,.\,2},\ \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}$$ u. s. w. nach demselben Gesetze, welchem gemäß folglich

$$\frac{m.\,m-1.\,m-2\,\ldots\,(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)}$$

und

$$\frac{m.\,m-1.\,m-2\,\ldots\,(m-n+2)\,(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1).n}$$

die 2 unmittelbar aufeinander folgenden allgemeinen Coeffizienten des nten und (n+1)ten Gliedes bildeten: so müßte man, wenn diese angenommene Formel für ir-

gend eine (oder mte) Potenz von a+b gültig wäre, die wahren Coeffizienten der Glieder der nächsthöheren (m+1)ten Potenz erhalten, wenn man m+1 statt m in obiger Formel substituirte.

Durch diese Substitution erhält man folgende Coeffizienten nach der Ordnung:

$$1;\ \frac{m+1}{1};\ \frac{(m+1).m}{1.2}\ \text{oder}\ \frac{m(m+1)}{1.2} = \frac{m^2+m}{1.2};$$

$$\frac{(m+1).m.m-1}{1.2.3}$$

$$\text{oder}\ \frac{m.m-1.(m+1)}{1.2.3} = \frac{(m^2+m)(m-1)}{1.2.3} = \frac{m^3-m}{1.2.3};$$

$$\frac{(m+1).m.m-1.m-2}{1.2.3.4}$$

$$\text{oder}\ \frac{m.m-1.m-2.(m+1)}{1.2.3.4} = \frac{(m^3-m)(m-2)}{1.2.3.4}$$

$$= \frac{m^4-2m^3-m^2+2m}{1.2.3.4};$$

u. s. w. Man bemerkt, daß die verlangte Substitution schnell dadurch vollzogen werde, daß man aus dem entsprechenden Coeffizienten eines Gliedes der nächstniedern (mten) Potenz von a+b den letzten Faktor wegläßt, und statt dessen den Faktor (m+1) setzt. Demnach wird der allgemeine Coeffizient des (n+1)ten Gliedes der nächsthöheren (m+1)potenz dieser:

$$\frac{[m.m-1.m-2....(m-n+2](m+1)}{1.2.3....(n-1)\ n} = \frac{P(m+1)}{1.2...n},$$

wenn man das Produkt aus den eingeklammerten Faktoren kurz =P setzt.

Vermöge des unter 4) aufgestellten Kriterions werden diese durch Substitution entwickelten Coeffizienten unter obiger Annahme die wahren seyn hinsichtlich der nächsthöheren Potenz von a+b, wenn eben diese Coeffi-

zienten auch durch gehörige Addition der Coeffizienten der Glieder der nächstniederen Potenz zum Vorschein kommen. Nun ist wirklich 1) $1+\frac{m}{1}=\frac{m+1}{1}$; 2) $\frac{m}{1}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}=\frac{m^2+m}{2}$; 3) $\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{m^3-m}{1.2.3}$; u. s. w. und in Beziehung auf die allgemeinen Coeffizienten ist eben so:

$$\frac{m.m-1....(m-n+2)}{1.2.3...(n-1)}+\frac{m.m-1...(m-n+2)(m-n+1)}{1.2.3...(n-1).n}$$

$$=\frac{n[m.m-1...(m-n+2)]+[m.m-1...(m-n+2)](m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}$$

$$=\frac{nP+P\,(m-n+1)}{1.2.3...n}$$ (wenn man die eingeklammerte Größe, wie oben, durch P bezeichnet) $=\frac{P(n+m-n+1)}{1.2.3...n}$

$$=\frac{P(m+1)}{1.2...n}.$$

Wenn demnach die Formel unter O) die wahren Coeffizienten vorstellt der Glieder irgend einer Potenz von a+b: so giebt sie auch die wahren Coeffizienten der Glieder der nächst höheren Potenz.

6) Wendet man nun den Ausdruck O) auf die Coeff. in $(a+b)^7$ mittels Substitution der Zahl 7 für m an: so erhält man die richtigen Coeff. dieser Potenz. Also gilt vermöge 5) derselbe Ausdruck für die Coeff. der nächsthöheren 8ten Potenz; gilt er für diese: so gilt er auch für die (m+1)te oder 9te Potenz, und so ins Unendliche, d. h. das durch den Ausdruck O) dargestellte Gesetz ist das für die Coeff. jeder Potenz einer Binomialgröße unserer Aufgabe gemäß gültige Gesetz.

Will man dieses Gesetz als Regel, den Coeffizienten eines jeden Gliedes zu finden, ausdrücken, so lautet es

so: „Man findet den Coeffizienten jeden Gliedes, wenn man das Produkt aus dem Coeffizienten des unmittelbar vorhergehenden Gliedes in den Exponenten von a desselben Gliedes dividirt durch die Zahl aller Glieder, welche dem, dessen Coeffizienten man sucht, vorhergehen.

Also $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2$

$+ m.\frac{m-1.\ m-2}{2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots + m.\frac{m-1.\ m-2\ldots m-n+1}{1.2.3\ldots n}a^{m-n}b^n + \ldots$. Dieser letzte Ausdruck unserer Newton'schen Binominalformel heißt das allgemeine, oder (n+1)te Glied, weil man aus ihm durch Substitution jedes Glied einer verlangten Potenz von a+b entwickeln kann; in ihm ist übrigens m—n+1 eben das, was m—(n—1) ist.

Wenn man daher m+n statt m substituirt: so hat man den Ausdruck des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung von $(a+b)^{m+n}$, nämlich:

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots n}a^m b^n.$$

Weil ferner jener Coeffizient des allgemeinen Gliedes im Zähler alle Zahlen von m an bis zu (m—n+1) als Faktoren, nicht aber die Zahlen von (m—n) an bis zu 1, d. i. nicht das Produkt 1. 2. ... (m—n) enthält: so geht der Zähler, wenn man dieses Produkt als Faktor in ihm ansetzt, in diesen 1. 2. 3... m, folglich der ganze Coeffizient ohne Verletzung seines Werthes in diesen über:

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots n \times 1.2\ldots(m-n)}.$$

Man wird übrigens nicht unbemerkt lassen, daß in jedem

(so auch im allgemeinen) Gliede unserer Formel die Summe der Exponenten von a und b immer $=m$ sey.

Zusatz 2. Da $a^{m-1} = \frac{a^m}{1}$; $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ u. s. w. so verwandelt sich unsere letztere Formel in diese: $(a+b)^m$

$$= a^m + \frac{ma^mb}{a} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{a^mb^2}{a^2} + m.\frac{m-1.\ m-2}{2.\ 3}.\frac{a^mb^3}{a^3}$$

+, ꝛc Oder da a^m gemeinschaftlicher Faktor ist: so hat man $(a+b)^m = a^m\left(1 + \frac{mb}{a} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{b^2}{a^2} + m.\frac{m-1.\ m-2}{2\quad 3}.\frac{b^3}{a^3} + \text{ꝛc.}\right) = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$.

Die im vorletzten Einschlusse befindlichen Größen lassen sich aus den Größen $m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}$ u. s. w. folgendermaßen ableiten: Man setze 1 für sich und multiplizire dieses mit m und auch mit $\frac{b}{a}$; so hat man $\frac{mb}{a}$; dieses Glied multiplizire man weiter mit $\frac{m-1}{2}$ und auch mit $\frac{b}{a}$: so erhält man $m.\frac{m-1}{2}.\frac{b^2}{a^2}$. Endlich dieses Glied mit jener 3. Größe $\frac{m-2}{3}$ und auch mit $\frac{b}{a}$ multiplizirt, giebt die 3te Größe $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{b^3}{a^3}$; u. s. w.

Vereinigt man diese auf die gesagte Weise erhaltenen Größen und multiplizirt noch jede mit a^m: so erhält man auf die leichteste Art die Glieder einer zu elevirenden Binomialgröße.

1. Beyspiel. $(x^3+y^5)^5$, wo $m=5$, $x^3=a$, $y^3=b$.

Man setze hier

5, $\frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$ für m, $\frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}$ ... so hat man hieraus

$$1 + \frac{5y^3}{x^3} + \frac{10y^6}{x^6} + \frac{10y^9}{x^9} + \frac{5y^{12}}{x^{12}} + \frac{y^{15}}{x^{15}}.$$

Daher $(x^3+y^3)^5 = x^{15} + 5x^{12}y^3 + 10x^9y^6 + 10x^6y^9 + 5x^3y^{12} + y^{15}$.

Sollte man aber (a—b) oder (x^3-y^3) zur Potenz erheben, so müßte man, weil in diesem Falle die Zeichen der Glieder alterniren, stets mit $-\frac{b}{a}$ oder $-\frac{y^3}{x^3}$ multipliziren.

Zusatz 3. Der Grund, warum allgemein in der Entwickelung von $(a-b)^m$ die Zeichen der Glieder alterniren, erhellt aus §. 57. im Vergleiche mit unserer Binominalformel. Allein man muß sich wohl hüten, zu schließen, daß $(a-b)^m = (b-a)^m$ sey, indem dieses nur wahr ist, wenn m eine gerade Zahl bezeichnet. Ist aber m eine ungerade Zahl: so giebt zwar die Entwickelung dieselben Glieder mit alternirenden Zeichen, aber für dieselben Größen, die man aus $(a-b)^m$ erhält, giebt sie die umgekehrten Zeichen in der Entwickelung von $(b-a)^m$. Man kann sich hievon schon aus $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, und $(b-a)^3 = b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3$ überzeugen (und allgemein vermöge obigen Grundes). Für den Fall also, wo m eine ungerade Zahl bedeutet, ist allgemein $(b-a)^m = -(a-b)^m$.

Zusatz 4. Wenn ein Glied des Binomiums eine imaginäre Größe ist: so muß man beym Potenziren den §. 59. mit Zus. 1. und 2. berücksichtigen. So ist z. B.

$$(x+y\sqrt{-1})^n = x^n + nx^{n-1}y\sqrt{-1} - \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} \cdot x^{n-2}y^2 - \frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\ 3} \cdot x^{n-3}y3\sqrt{-1} + \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$x^{n-4}y^4 + \ldots$ Oder wenn man die unbestimmten Coeffizienten der Kürze wegen setzt, und die Glieder ordnet, hat man:

$(x+y\sqrt{-1})^n = x^n - Bx^{n-2}y^2 + Dx^{n-4}y^4 - Fx^{n-6}y^6 + Hx^{n-8}y^8 - \ldots + \sqrt{-1}(Ax^{n-1}y - Cx^{n-3}y^3 + Ex^{n-5}y^5 - Gx^{n-7}y^7 + \ldots)$. Eben so ist vermöge Zus. 3. $(x-y\sqrt{-1})^n = x^n - Bx^{n-2}y^2 + Dx^{n-4}y^4 - \ldots - \sqrt{-1}(Ax^{n-1}y - Cx^{n-3}y^3 + \ldots)$, so, daß folglich $(x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n = 2(x^n - Bx^{n-2}y^2 + Dx^{n-4}y^4 + \ldots)$ ist und die imaginären Größen verschwinden. Dagegen ist aber $(x+y\sqrt{-1})^n - (x-y\sqrt{-1})^n = 2\sqrt{-1}(Ax^{n-1}y - Cx^{n-3}y^3 + \ldots)$, wo also die reellen Größen verschwinden.

Zusatz 5. Soll eine mehrgliedrige, z. B. eine Trinomialgröße $a+b+c$ z. B. zur 3ten Potenz elevirt werden: so setze man $b+c=p$. Nun ist $(a+p)^3 = a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 =$ (durch Substit.) $a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3$. U. s. w. Es erhellt, daß man nach denselben Regeln, nach welchen man eine Binomialgröße zur beliebigen Potenz erhebt, auch jede andere mehrgliedrige Größe erheben könne.

Leicht findet man indessen auch den Ausdruck des allgemeinen Gliedes der mten Potenz eines Polynoniums $a+b+c+d+\ldots$ auf folgende Weise:

Läßt man in $(a+b)^m$ sich b in $b+c$ ändern: so hat man, indem man die unbestimmten Coeffizienten A, B, C, ... wählt, $(a+b+c)^m = a^m + Aa^{m-1}(b+c) + Ba^{m-2}(b^2+2bc+c^2) + Ca^{m-3}(b^3+3bc^2+3b^2c+c^3) + \ldots$

Und wenn wir das allgemeine Glied von $(a+b)^m$ kurz durch $Na^{m-n}b^n$ ausdrücken: so ist auch von $(a+b+c)^m$ dieses allgemeine Glied $= Na^{m-n}(b+c)^n$
$= Na^{m-n}(b^n + A'b^{n-1} + B'b^{n-2}c^2 + C'b^{n-3}c^3 + \ldots + N'b^{n-n'}c^{n'})$, oder das allgemeine Glied ist $NN'a^{m-n}b^{n-n'}c^{n'}$.

Man setze ferner, daß sich c in c+d verändere: so wird man, weil

$(c+d)^{n'} = c^{n'} + A''c^{n'-1}d + B''c^{n'-2}d^2 + \ldots + N''c^{n'-n''}d^{n''}$

ist, durch Substitution des letzten allgemeinen Gliedes statt $c^{n'}$ im vorigen Ausdrucke nun das allgemeine Glied von $(a+b+c+d)^m = NN'N''a^{m-n}b^{n-n'}c^{n'-n''}d^{n''}$ finden, wo denn wieder, wie wir oben unter 6) bemerkten, die Summe der Exponenten $= m$ ist.

Auf gleiche Weise ist das allgemeine Glied von

$(a+b+c+d+e)^m$

$= NN'N''N'''a^{m-n}b^{n-n'}c^{n'-n''}d^{n''-n'''}e^{n'''}$; u. s. w., so daß man nur noch die numerischen Coeffizienten N, N', N'', ... zu entwickeln und hinzuzufügen hat, um den allgemeinen Ausdruck des allgemeinen oder (n+1)ten Gliedes der mten Potenz einer vielgliedrigen Größe zu haben.

Es ist aber nach 6)

$$N = \frac{1.2.\ldots.m}{1.2\ldots n \times 1.2..(m-n)}, \text{ eben so } N' = \frac{1.2.\ldots.n}{1.2..n' \times 1.2\ldots(n-n')},$$

$$\text{ferner } N'' = \frac{1.2.\ldots.n'}{1.2..n'' \times 1.2..(n'-n'')} \text{ und}$$

$$N''' = \frac{1.2.\ldots.n''}{1.2..n''' \times 1.2..(n''-n''')}, \text{ u. s. w. Hieraus}$$

findet man durch gehörige Reduktion $NN'N''N''' =$

$$\frac{1.2.3.\ldots.m}{1.2..(m-n) \times 1.2..(n-n') \times 1.2..(n'-n'') \times 1.2..(n''-n''') \times 1.2..(n''')}$$

Setzt man endlich der Kürze wegen statt der eingeschlossenen Faktoren des Nenners resp. p, q, r, s, t, wo denn $p+q+r+s+t = m$ ist: so findet man das allgemeine Glied der Potenz $(a+b+c+d+e)^m$ so ausgedrückt:

$$\frac{1.2.3.\ldots.m}{1.2..p \times 1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times 1.2..t} a^p b^q c^r d^s e^t \text{ *).}$$

*) Wie unter dem binomischen Lehrsatze (theorema binomiale) die Aufstellung obiger Formel unter 6), so wird unter dem p o-

Die Anwendung dieser Formel zur Auffindung aller Glieder einer Potenz von einem Polynomium hält nicht schwer, indem man das Gesetz berücksichtiget, nach welchem die Summe der Exponenten p, q, r, . . ., welche die Zahlen von 1 bis m sind, in jedem Gliede der Potenz gleich m ist.

Beyspiel. Die Glieder von $(a+b+c+d)^4$ zu finden. Entwickelt man dieselben nach den Potenzen von a: so hat man vermöge jenes Gesetzes statt dem Produkte $a^p b^q c^r d^s$ nur folgende Produkte in Beziehung

auf a^4	auf a^3		auf a^2		auf a^1		auf a^0	
$a^4)\ 1$	a^3b		$a^2\ b^2$		$a\ b^3$		a^0b^4	
$= a^4b^0c^0d^0$	a^3c	2.	$\cdot\ c^2$	3.	$\cdot\ c^3$	2.	$\cdot\ c^4$	1.
	a^3d		$\cdot\ d^2$		$\cdot\ d^3$		$\cdot\ d^4$	
	bc		b^2c		b^3c			
	bd	4.	b^2d		b^3d			
	cd		$b\ c^2$	4.	$b\ c^3$	2.		
			$b\ d^2$		$b\ d^3$			
			c^2d		c^3d			
			$c\ d^2$		$c\ d^3$			
			$abcd)\ 5.$		b^2c^2			
					b^2d^2	3.		
					c^2d^2			
					b^2cd			
					bc^2d	4.		
					bcd^2			

Nach unserer Formel gehört zu den Gliedern unter 1. der numerische Coeffizient $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 1$; zu allen Gliedern unter 2. der Coeffizient $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 3 \times 1} = 4$; zu den Gliedern unter 3. der Coeffizient $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2. \times 1.\ 2} = 6$; zu den

---

lynomischen Lehrsatze (theor. polynomiale) die Aufstellung der zuletzt entworfenen Formel verstanden.

Gliedern unter 4. der Coeffizient $\frac{1.2.3.4}{1.2 \times 1 \times 1} = 12$, zu dem Gliede abcd unter 5. der Coeffizient $\frac{1.2.3.4}{1.1.1.1} = 24$.

Zusatz 5. Wenn man die Summe der Coeffizienten aller Glieder der im §. 65. entwickelten Potenzen von $a+b$ berücksichtiget: so wird man leicht finden, daß diese Summe gleich sey der sovielsten Potenz von 2, als der Exponent der Potenz des Binomiums anzeigt. So ist in den Gliedern für $(a+b)^3$ diese Summe der Coefizienten $= 2^3$. Allgemein in $(a+b)^m$ ist diese Summe $= 2^m$. Denn setzt man $a = b = 1$, so daß man hat $(1+1)^m$: so fallen bey der Entwickelung alle Potenzen von a und b, als $= 1$, gleichsam weg, und die numerischen Coeffizienten bleiben, deren Summe folglich $= (1+1)^m = 2^m$ ist.

§. 66. Lehrsatz. Die Binomialformel bleibt gültig, wenn man $-m$ statt $+m$, und statt der ganzen Zahl m eine gebrochene $\frac{r}{s}$ setzt, oder es ist auch I. $(a+b)^{-m} = a^{-m} + \frac{-m}{1} a^{-m-1} b + \frac{-m(-m-1)}{1.2} a^{-m-2} b^2 + \ldots + \frac{-m(-m-1)\ldots(-m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a^{-m-n} b^n = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m.m+1}{1.2} \cdot \frac{b^2}{a^{m+2}} + \ldots + \frac{m.m+1\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{b^n}{a^{m+n}}$, wo $+$ gilt, wenn n eine gerade, also $n+1$ eine ungerade Zahl ist, — aber, wenn n ungerade, das $(n+1)$te Glied also zur geraden Anzahl der Glieder gehört.

Auch ist II. $(a+b)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}} + \frac{\frac{r}{s}}{1} a^{\frac{r}{s}-1} b$

$$+ \frac{\frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s}-1 \; \frac{r}{s}-2}{1.\ 2} a^{\frac{r}{s}-2} b^2 + \frac{\frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s}-1 \cdot \frac{r}{s}-2 \; \frac{r}{s}-3}{1.\ 2.\ 3} a^{\frac{r}{s}-3} b^3 + \ldots$$

$$= a^{\frac{r}{s}} + \frac{r}{s} a^{\frac{r-s}{s}} b + \frac{r.\ r-s}{1.\ 2.\ s^2} a^{\frac{r-2s}{s}} b^2 + \frac{r.r-s.\ r-2s}{1.\ 2.\ 3.\ s^3} a^{\frac{r-3s}{s}} b^3 + \ldots + \frac{r.\ r-s \ldots\ldots (r-(n-1)s)}{1.\ 2. \ldots\ldots n.\ s^n} a^{\frac{r-ns}{s}} b^n.$$

Beweis von I. $(a+b)^{-m} = a^{-m} \left(1+\frac{b}{a}\right)^{-m}$

(§. 65. Zus. 2.) $= \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{(1+c)^m}$, indem man nämlich statt $\frac{b}{a}$ setzt c.

Man setze nun $m = 1$, so ist $\frac{1}{(1+c)^m} = \frac{1}{1+c}$ $= 1-c+c^2-c^3+\ldots.$ (§. 41. Zus. 3.). Aber wenn $m = 1$, so ist auch jeder der Coeffizienten $\frac{m}{1}, \frac{m.\ m-1}{1.\ 2}, \ldots = 1$, folglich ist $\frac{1}{1+c} = 1 - \frac{m}{1} c + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2} c^2 - \frac{m.\ m+1.\ m+2}{1.\ 2.\ 3} c^3 \ldots$ u. s. w.

Man nehme $\frac{1}{(1+c)^2}$, so ist das eben so viel, als man dividirte $\frac{1}{1+c}$ durch $1+c$. Aber wenn man die vorige der Größe $\frac{1}{1+c}$ gleiche Reihe nach §. 41. 2. di-

vidirt und gehörig reduzirt, erhält man $\frac{1}{(1+c)^2} = 1 - \frac{m+1}{1}c + \frac{m+1.\ m+2}{1.\ 2}c^2 - \frac{m+1.\ m+2.\ m+3}{1.\ 2.\ 3}$. $c^3 + \ldots$. wo aus dieser Division erhellt, daß die Partialquotienten immer unter derselben Form fortschreiten, soweit man auch die Division fortsetzen mag. Aber m ist $= 1$, folglich ist $\frac{1}{(1+c)^2} = 1 - \frac{2}{1}c + \frac{2.\ 3}{1.\ 2}c^2 - \frac{2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.\ 3}c^3 + \ldots$ und m statt 2 gesetzt, ist $\frac{1}{(1+c)^2} = 1 - \frac{m}{1}c + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2}c^2 - \frac{m.\ m+1.\ m+2}{1.\ 2.\ 3}c^3 + \ldots$ d. i. man hat wieder dieselbe Form für $(1+c)^{-2}$, wie vorhin für $(1+c)^{-1}$.

Auf gleiche Weise erhält man daher, wenn man $\frac{1}{(1+c)^2}$ durch $1+c$ dividirt, wieder $\frac{1}{(1+c)^3} = 1 - \frac{m+1}{1}c + \frac{m+1.\ m+2}{1.\ 2.}c^2 - \ldots$, wie vorher, wo aber nun $m = 2$ ist. Setzt man dieses 2 statt m in diese Formel: so hat man $\frac{1}{(1+c)^3} = 1 - \frac{3}{1}c + \frac{3.\ 4}{1.\ 2}c^2 - \frac{3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3}c^3 + \ldots$ und setzt man jetzt $3 = m$: so ist $\frac{1}{(1+c)^3} = 1 - \frac{m}{1}c + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2}c^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.\ 2.\ 3}c^3 + \ldots$ d. i. man hat dieselbe Form für die Entwickelung von $(1+c)^{-3}$, wo $m = 3$, wie vorher für die Entwickelung von $(1+c)-^2$, wo $m = 2$ war.

Es erhellt, daß man auf dieselbe Art fortfahren könne, dieselbe Form für $\frac{1}{(1+c)^4}$, für $\frac{1}{(1+c)^5}$, u. s. w. zu

bilden, daß folglich allgemein $\frac{1}{(1+c)^m} = (1+c)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}c + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2}c^2 - \frac{m.\ m+1.\ m+2}{1.\ 2.\ 3}c^3 + \ldots$ sey, welche ganze Zahl auch m bedeuten möge. Setzt man nun statt c seinen Werth $\frac{b}{a}$ und multiplizirt noch die vorige Reihe mit $\frac{1}{a^m} (= a^{-m})$: so erhält man die im Lehrsatze unter I. angeführte Formel, deren Gültigkeit zu beweisen war.

Beweis von II. Es ist $(a+b)^r)^s = (a+b)^{rs}$ (nach §. 55. 5. indem man $(a+b)$ wie eine einnamige Größe $= c$ betrachten kann) $= a^{rs} + \frac{rs}{1} a^{rs-1} b + \frac{rs.\ rs-1}{1.\ 2} a^{rs-2} b^2 + \ldots$. vermöge unserer Binomialformel, indem $rs = m =$ einer ganzen +zahl ist.

Nun ist $(a+b)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(a+b)^r}$, folglich ist jetzt die entgegengesetzte Operation einzuhalten, d. i. da man vorher, wo $(a+b)^r$ zur sten Potenz erhoben werden sollte, die Zahl r in allen Gliedern der Entwickelung von $(a+b)^r$ mit s multipliziren mußte, so muß nun r überall durch s dividirt werden, wodurch man denn die im Lehrsatze unter II. angeführten Formeln erhält.

Zusatz 1. Aus den Formeln unter I. verglichen mit §. 65. Zus. 3. erhellt, daß die Entwickelung von $(a-b)^{-m}$ zwar dieselben Glieder, wie die von $(a+b)^{-m}$, gebe, aber ohne alternirende Zeichen. Man kann jene Formel allgemeiner so ausdrücken: $(a \pm b)^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$$\left(1 \pm \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \pm \frac{m\ \ m+1.\ m+2}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot \right.$$
$$\left. + \ldots\right).$$

Zusatz 2. Aus der Art, wie wir im Zus. 5. des vorigen §. die Formel des allgemeinen Gliedes der mten Potenz einer mehrgliedrigen Größe entwickelten, erkennt man klar, daß dieselbe ebenfalls gültig sey, wenn man in ihr $-m$ oder $\frac{r}{s}$ statt m substituirt.

Zusatz 3. Auch leuchtet ein, daß alle diese Formeln gültig bleiben,

1) wenn $m = -\frac{r}{s}$ ist, indem z. B. $(a+b)^{-\frac{r}{s}}$
$= \sqrt[s]{(a+b)^{-r}}$;

2) wenn m eine Irrationalzahl ist, oder wenn man z. B. hat $(a+b)^{\sqrt{m}} = (a+b)^{m^{\frac{1}{2}}}$, indem man die Irrationalität einer Zahl, soweit man will, verschwinden machen kann; daher auch

3) wenn m selbst eine unmögliche Zahl ist, wie z. B. $(a+b)^{\sqrt{-m}} = (a+b)^{(-m)^{\frac{1}{2}}}$.

Zusatz 4. Ist $m = \frac{1}{s}$, d. i. gleich einem Stammbruche: so gehen die Größen m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ . . . (§. 65. Zus. 2.) in diese $\frac{1}{s}$, $\frac{\frac{1}{s}-1}{2}$, $\frac{\frac{1}{s}-2}{3}$, . . . oder in $\frac{1}{s}$, $-\frac{s-1}{2s}$, $-\frac{2s-1}{3s}$, . . . über, daher ist nun $(a \pm b)^{\frac{1}{s}}$

$$= \sqrt[s]{(a \pm b)} = \sqrt[s]{a}\left[1 \pm \frac{1}{s} \cdot \frac{b}{a} - \frac{s-1}{2s^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\pm\frac{(s-1).(2s-1)}{2.3.s^3}.\frac{b^3}{a^3}-\frac{(s-1)(2s-1)(3s-1)}{2.3.4.s^4}.\frac{b^4}{a^4}\pm\ldots\Big]$$

Eben so ist noch allgemeiner $(a\pm b)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(a\pm b)^r}=\sqrt[s]{a^r}$

$$\Big[1\pm\frac{r}{s}.\frac{b}{a}-\frac{r(s-r)}{2.s^2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{r(2s-r)(3s-r)}{2.3.s^3}.\frac{b^3}{a^3}-\ldots.\Big]$$

Diese Formel kömmt in Anwendung, wenn $\frac{r}{s}$ ein ächter, auf den kürzesten Ausdruck gebrachter, Bruch ist. Auch weiß man vermöge des Vorhergehenden, daß in der Entwickelung von $\sqrt[s]{(a-b)^r}$ alle Glieder des Einschlusses, welche auf das erste Glied 1 folgen, das Zeichen — haben müssen.

Ist aber $\frac{r}{s}$ ein unächter Bruch, oder $r>s$: so erkennt man leicht, daß 1) erst bey demjenigen Gliede obiger Formel, in welchem das Vielfache des $s>r$ wird, das Zeichen — und hiemit das Alterniren der Zeichen anfange; daß 2) es für die Anwendung vorzuziehen sey, die vorgegebene Größe zum Theile von ihrer Irrationalität zu befreyen. Gleichwie nämlich $a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3}=a\sqrt{a}$ ist, eben so ist, wenn man $\frac{r}{s}=c+\frac{d}{e}$ setzt, $(a+b)^{c+\frac{d}{e}}$

$=(a+b)^c\sqrt[e]{(a+b)^d}$, wo man denn in Beziehung auf den 2ten Faktor eine der vorigen letzten Formeln in Anwendung bringt, je nachdem $d=1$, oder $=$ einer andern ganzen Zahl ist.

Zusatz 5. Die Schwierigkeit, die Glieder der Potenz eines Polynomiums vermöge des Gesetzes über die Exponentensumme (vergl. das Ende des Zus. 5. §. 65.) richtig zu bilden in dem Falle, wenn m eine gebrochene

oder —zahl ist, wird dadurch vermieden, daß man die vielgliedrige Größe $a+b+c\ldots$ in ein Binomium $a+x$ verwandelt, die Glieder der verlangten Potenz nach einer der vorigen Formeln bildet, und nun statt der ganzen und +potenzen von x dieselben Potenzen von $b+c+\ldots$ substituirt.

Zusatz 6. Die Formel I. läßt sich nach §. 65. Zusatz 2. auch so ausdrücken:

$$(a+b)^{-m} = a^{-m}\left(1 - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\right.$$
$$\left. - \frac{m.\ m+1.\ m+2}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \frac{m.\ m+1.\ m+2.\ m+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\cdot\frac{b^4}{a^4} - \ldots\right).$$

Setzt man $b = \frac{-ay}{a+y}$, so ist $a+b = a + \frac{-ay}{a+y} = \frac{a^2}{a+y}$, und $\frac{b}{a} = \frac{-ay}{a(a+y)} = \frac{-y}{a+y}$, folglich

$$\left(\frac{a^2}{a+y}\right)^{-m} = \left(\frac{a+y}{a^2}\right)^{m} = a^{-2m}(a+y)^m = a^{-m}\left(1 - \frac{m}{1}\cdot\frac{-y}{a+y} + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2}\left(\frac{-y}{a+y}\right)^2 - \frac{m.\ m+1.\ m+2}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{-y}{a+y}\right)^3 + \ldots\right)$$

Multiplizirt man auf beyden Seiten mit a^{2m}, so hat man auch nach §. 24. VII. 3)

$$(a+y)^m = a^m\left(1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{y}{(a+y)^1} + \frac{m.\ m+1}{1.\ 2}\cdot\frac{y^2}{(a+y)^2} + \frac{m.\ m+1.\ m+2}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{y^3}{(a+y)^3} + \ldots\right)$$

Wenn man daher x^s statt a und $\frac{1}{s}$ statt m setzt: so hat man unter Berücksichtigung des Zusatzes 3. §. 65.

$$(x^s \pm y)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{(x^s \pm y)} = x\left(1 \pm \frac{1}{s}\cdot\frac{y}{(x^s \pm y)^1}\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{s}(\frac{1}{s}+1)}{1.\ 2}\cdot\frac{y^2}{(x^s\pm y)^2}\mp\frac{\frac{1}{s}(\frac{1}{s}+1)(\frac{1}{s}+2)}{1.\ 2.\ 3}\cdot$$

$$\frac{y^3}{(x^s\pm y)^3}+\ldots.),\ \text{oder}$$

$$\sqrt[s]{(x^s\pm y)}=x(1\pm\frac{y}{s(x^s\pm y)^1}+\frac{1.\ (s+1).\ y^2}{1.\ 2.\ s^2\ (x^s\pm y)^2}$$

$$\mp\frac{1.\ (s+1)\ (2s+1).\ y^3}{1.\ 2.\ 3.\ s^3(x^s\pm y)^3}+\ldots)$$

Folglich ist auch speziell:

$$\sqrt{(a^2\pm y)}=a(1\pm\frac{y}{2(a^2\pm y)}+\frac{3y^2}{2^3(a^2\pm y)^2}\mp\frac{5y^3}{2^4(a^2\pm y)^3}$$

$$+\frac{35y^4}{2^7(a^2\pm y)^4}\mp\frac{63y^5}{2^8(a^2\pm y)^5}+\ldots).\ \text{Und eben so ist}$$

$$\sqrt[3]{(a^3\pm y)}=a(1\pm\frac{y}{3(a^3\pm y)}+\frac{2y^2}{9(a^3\pm y)^2}\mp\frac{14y^3}{81(a^3\pm y)^3}$$

$$+\frac{35y^4}{729(a^4\pm y)^4}\mp\frac{91y^5}{6561(a^3\pm y)^5}+\ldots).$$

Zusatz 7. Wenn man in obiger Formel im Zus. 4. statt $\frac{r}{s}$ setzt $-\frac{r}{s}$: so sieht man leicht, daß allgemein sey:

$$(a\pm b)^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(a\pm b)^{-r}}=\frac{1}{\sqrt[s]{(a\pm b)^r}}=\frac{1}{\sqrt[s]{a^r}}\ (1\mp$$

$$\frac{r}{s}\cdot\frac{b}{a}+\frac{r(s+r)}{1.\ 2.\ s^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\mp\frac{r(s+r)(2s+r)}{1.\ 2.\ 3.\ s^3}\cdot\frac{b^3}{a^3}+\ldots).$$

Anwendung.

§. 67. **Aufgabe 1.** Eine gegebene mehrziffrige ganze Zahl, als Wurzel, zum Quadrat zu erheben, und umgekehrt die Wurzel wieder auszuziehen.

Auflösung. 1. a). Man verfährt entweder nach dem Begriffe von Potenz (§. 52.), indem man die vorgegebene Wurzel einmal mit sich selbst multiplizirt; oder nach dem formularischen Ausdrucke von $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, indem man die gegebene zweyzifferige Wurzel z. B. 35 ebenfalls als Summe zweyer Wurzeltheile oder Wurzelnoten, d. i. als Binomium $=30+5$, und demnach ihr Quadrat durch die Entwickelung seiner durch a^2, $2ab$, b^2 repräsentirten Bestandtheile darstellt. Auf diese Weise hat man $30^2 + 2.30.5 + 5^2$, oder

$$900 + 300 + 25, \text{ oder } \left.\begin{matrix} 9. \\ +30. \\ +25 \end{matrix}\right\} = 12\,|\,25 = 35^2.$$

b). Da $10^2 = 100$; $100^2 = 100.100 = 10000$, u. s. w.; da ferner $20^2 = 2.10)^2 = 2^2.10^2$ (§. 53.) $= 4.100 = 400$; $3500^2 = 35^2.100^2 = 1225.10000 = 12250000$ u. s. w. ist: so erhellt, daß man nur die durch die geltenden Ziffern einer Wurzel ausgedrückte Zahl zu quadriren, und dem so gefundenen Quadrate soviele Paare von Nullen anzuhängen habe, als wieviele Nullen jenen geltenden Ziffern beygefügt sind.

c). Kömmt eine dritte Wurzelnote c zu $a+b$ hinzu, oder hat man z. B. die Wurzel $357 = 300 + 50 + 7$, und man setzt $a+b$, oder $300 + 50 = p$: so hat man für $(p+c)^2$ dieselbe Form, wie vorher, nämlich $p^2 + 2pc + c^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\,c + c^2$; woraus erhellt, daß zu dem bereits entwickelten $(a+b)^2$ oder p^2 auf ähnliche Art, wie vorhin zu a^2, jetzt wegen der dritten Wurzelnote noch das doppelte Produkt aus eben dieser in die Summe der 2 vorhergehenden Wurzelnoten (wie vorhin $2ab$) und das Quadrat der dritten Wurzelnote (wie vorhin b^2) addirt werden müsse. Nun ist das Quadrat von $(300+50)$ oder von $350 = 122500$; das doppelte Produkt aus 7 in $350 = 4900$ und das

Quadrat von $7 = 49$; folglich ist $(300 + 50 + 7)^2 = 122500 + 4900 + 49$, oder =

$$\left.\begin{array}{|c|c|}\hline 9 & \cdot\,\cdot \\ \hline 3 & 0\,\cdot \\ \hline 25 & \cdot\,\cdot \\ \hline 49 & 0\,\cdot \\ \hline & 49 \\ \hline\end{array}\right\} = 12\,|\,74\,|\,49;\ \text{und}\ 106^2 = \left.\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline \cdot & \cdot\,\cdot \\ \hline 12 & 0 \\ \hline & 36 \\ \hline\end{array}\right\} = 1\,|\,12\,|\,36.$$

d). Man sieht, daß die nämliche Schließart wiederkehre, wenn eine vierte Wurzelnote d zu $a+b+c$ hinzukömmt, daß man nämlich setzen könne $a+b+c = p'$ und $(a+b+c+d)^2 = (p'+d)^2$. Die erste Wurzelnote a giebt daher im Quadrate ihr eigenes Quadrat, aber jede folgende Wurzelnote giebt zwey Bestandtheile, repräsentirt durch $2ab+b^2$, nämlich 1) das doppelte Produkt aus eben der folgenden in die vorhergehenden Wurzelnoten, und 2) ihr eigenes Quadrat; demnach giebt jede folgende Wurzelnote auch 2 neue Ziffernstellen im Quadrat (wie obige Beyspiele zeigen), und zwar ist die dem ersten Bestandtheile (2ab) entsprechende nothwendig die (10fach) höhere, weil, wenn die vorhergehende Wurzelnote z. B. ein Zehner, die folgende also ein Einer ist, das Produkt (2ab) aus Zehner in Einer wieder ein Zehner oder das Vielfache vom Zehner, aber das Quadrat (b^2) des Einers wieder nur Einer oder ein Vielfaches vom Einer ist.

e). Was aus der Natur unserer Ziffernzahlen hervorgeht, das zeigen die oben beygefügten Beyspiele klar, daß man nämlich sowohl die einzelnen Bestandtheile des Quadrats einer mehrziffrigen Zahl, als auch die Summe dieser Bestandtheile oder das gesuchte Quadrat richtig finde, wenn man jede Ziffer, ohne Berücksichtigung ihres Generalwerthes, als Wurzelziffer, oder die von ihr bezeichnete Zahl als Wurzelnote betrachtet, und jeden folgenden gebildeten Bestandtheil des Quadrats so unter [illegible] nächstvorhergehenden anschreibt, daß seine letzte

Ziffer rechts eine noch nicht ausgefüllte Ziffernstelle einnimmt.

f). Aus dem unter d) Gesagten geht hervor, daß das aus der Summe seiner Bestandtheile erzeugte Quadrat, wenn man 2 Ziffern zur Klasse rechnet, und die Eintheilung in Klassen von der Rechten gegen die Linke hin vollbringt, aus sovielen Klassen bestehe, als durch wieviele Ziffern die gegebene Wurzel ausgedrückt ist.

2. Soll daher umgekehrt aus solchen vollkommnen oder wahren Quadratzahlen die zweyte Wurzel wieder ausgezogen werden: so erkennt man 1) aus jener Eintheilung in Klassen, wieviele Wurzelnoten, und in welcher Klasse man jede einzelne Wurzelnote auffinden müsse; 2) weiß man, welche Bestandtheile man wieder nachbilden müsse, um sie nach und nach sämmtlich wieder von der gegebenen Quadratzahl abzuziehen; 3) weiß man vermöge der Probe über Addition (§. 34.), daß die letzte vollbrachte Subtraktion keinen Rest lassen könne.

Beyspiele. Es sey aus 127449 und aus 81144064 die Quadratwurzel auszuziehen. Die Rechnungen stehen so:

1)
12 | 74 | 49 | | 357
−9
37,4 : 3.2 (=6)
−325
494,9 : 35.2 (=70)
− 4949
0

65
5
325

707
7
4949.

2)
81 | 14 | 40 | 64 | | 9008.
−81
√1,4 : 18
144,1 : 180
14406,4 : 1800
−144064
0

18008
8
144064.

Erläuterung. Die erste Klasse 12 (=a^2) enthält das Quadrat der ersten Wurzelnote. Aber $\sqrt{12}$ ist zunächst = 3 und $3^2 = 9$, daher 3 die gesuchte erste Wurzelnote, und 9 der erste abzuziehende Bestandtheil. Indem man nun zum Reste 12 − 9 = 3 die folgende Klasse 74 herabsetzt, weiß man aus d), daß die Ziffer 7 oder 7 Zehner (wenn man die 2te gesuchte Wurzelnote als

Einer betrachtet), oder das Vielfache 37 Zehner dem ersten, seinem Werthe nach 10mal höheren, Bestandtheile (2ab), die Ziffer 4 aber dem nächst niederen Bestandtheile (b^2) entspreche, welche 2 Bestandtheile die gesuchte Wurzelnote im Quadrate gab. Nun ist es leichter und natürlicher, eben diese Wurzelnote (b) aus dem Bestandtheile zu suchen, in welchem sie als einfacher Faktor vorkömmt, d. i. in 2ab oder in 37; daher schneidet man die Ziffer 4 ab, und dividirt 37 = 2ab durch die doppelte erste, bereits aufgefundene Wurzelnote, d. i. durch 3. 2 = 2a = 6. Den Quotienten 6 als die zu findende Wurzelnote b betrachtend, bildet man nun die genannten 2 Bestandtheile $\begin{matrix}36\\+36\end{matrix}\Big) = 396$ nach. Weil aber $396 > 374$ ist, man also erkennt, daß nicht 6, sondern etwa die nächst kleinere Zahl 5 die gesuchte Wurzelnote seyn könne: so bildet man mit Hilfe von 5 dieselben 2 Bestandtheile 2ab und b^2 nach. Man findet $\begin{matrix}30\\+25\end{matrix}\Big) = 325$, welche Zahl < 374 nun von letzterer abgezogen wird; zum Reste 49 setzt man die folgende Klasse herab, und verfährt ganz wie vorher, indem man nun (35) wie eine einzige aufgefundene Wurzelnote = a betrachtet, so daß noch die zweyte oder folgende gefunden werden muß. Man sieht hieraus, daß ein und dasselbe Verfahren eingehalten werden müsse, soviele Klassen auch noch vorhanden, oder soviele folgende Wurzelnoten auch noch aufzufinden seyn mögen.

Da die Berechnung des zweyten Beyspieles nun von selbst klar ist: so haben wir nur noch 2 Bemerkungen beyzufügen; 1. nämlich ist ersichtlich, daß obiges Dividiren durch die doppelte vorhergehende Wurzelnote (2a) in Beziehung auf das Auffinden der wahren folgenden Wurzelnote (b) nur ein Tentiren sey, weil sich der Bestandtheil 2ab wegen der Addition sämmtlicher Be-

standtheile des Quadrates höchst selten rein, wie er erzeugt wurde, erhalten kann, wie die Beyspiele unter c) klar zeigen. 2. Ist das Nachbilden der Bestandtheile $2ab + b^2$ etwas kürzer dadurch zu vollenden, daß man den Quotienten, welchen man aus $\frac{2ab}{2a}$ erhält, und als gesuchte Wurzelnote betrachtet, dem Divisor beyschreibt und diese Zahl nun auch mit demselben Quotienten multiplizirt; statt nämlich, wie wir thaten, zu setzen $^{36}_{36}$, oder $^{30}_{25}$, schreibt man 66×6 oder 65×5. Denn es ist $2ab + b^2$ auch $= (2a+b)b$; die vorhergehende Wurzelnote (a) aber hat in Beziehung auf die folgende (b) einen 10mal höheren Werth, daher ist der Divisor 2a oder 3.2, d. i. 6 eigentlich $= 60$, wenn man die gesuchte folgende Wurzelnote (b) als Einer betrachtet. Daher hat man $(2a+b)b = (60+5)5 = 65\times5$, u. s. w. in allen gleichen Fällen.

Zusatz 1. Schon aus §. 53. Zus. 1. weiß man, daß z. B. $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$, und eben so $\left(\frac{11}{13}\right)^2 = \frac{11^2}{13^2} = \frac{121}{169}$, daß folglich auch umgekehrt $\sqrt{\frac{121}{169}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{169}} = \frac{11}{13}$ sey; d. i. gleichwie man Zähler und Nenner eines vulgären Bruches, als der gegebenen Wurzel, quadriren muß: so muß man umgekehrt, wenn die 2te Wurzel aus einem solchen Bruche zu finden ist, dieselbe sowohl aus dem Zähler, als dem Nenner ausziehen.

Ist die vorgegebene Wurzel eine Dezimalzahl z. B. 12,34: so weiß man aus der Regel über die Multiplikation dieser Zahlen, daß eine Dezimalstelle in der Wurzel 2 Dezimalstellen im Quadrate geben müsse. Man erhebt daher eine solche Zahl zum Quadrat, als wäre sie

eine ganze Zahl, und schneidet im gefundenen Quadrate die gehörigen Dezimalstellen von der Rechten gegen die Linke hin ab. So ist $1234)^2 = 1522756$, daher $12{,}34)^2 = 152{,}2756$.

Soll man daher umgekehrt aus einer solchen vollkommnen Dezimalquadratzahl die 2te Wurzel wieder ausziehen, und man theilt sowohl die die ganze Zahl bezeichnenden Ziffern, als auch die Dezimalen in Klassen ein: so weiß man, welche Wurzelnoten zur ganzen Zahl, und welche zu den zehntheiligen Brüchen gehören. So ist $\sqrt{1\,|\,52,\,|\,27\,|\,56} = 12,\,34$.

Zusatz 2. Wenn eine mehrnamige Buchstabengröße ein vollkommenes Quadrat ist: so findet man daraus die 2te Wurzel ganz nach der oben erörterten Methode. So ist

$$\sqrt{(16c^6d^2 - 48c^5d^3 + 36c^4d^4)} = 4c^3d - 6c^2d^2.$$

Es ist nämlich 1) $\sqrt{16c^6d^2} = 4c^3d$; das Quadrat dieser Wurzelnote von dem gegebenen Quadrate abgezogen und das Glied $-48c^5d^3$ durch $2.4c^3d$ $(=2a)$ dividirt, hat man 2) die andere Wurzelnote $-6c^2d^2$. Bildet man nun mit Hilfe derselben die durch $(2a+b)b$ repräsentirten Bestandtheile nach und zieht diese von dem gegebenen Quadrate ab: so bleibt 0 als Rest, demnach ist $4c^3d - 6c^2d^2$, oder $2c^2d\,(2c-3d)$ die gesuchte Wurzel.

Auf gleiche Weise ist $\sqrt{\left(\frac{64a^2}{25} + 4ab^2 + \frac{25}{16}b^4\right)} = \frac{8}{5}a + \frac{5}{4}b^2$. Eben so ist

$$\sqrt{(1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4)} = 1 - 2x + 3x^2.$$

Nämlich $\sqrt{1} = 1$; dann $-4x : 2.\,1 = -2x$, als zweyter Wurzeltheil. Aber $(2a+b)b$ durch Substitution $= (2-2x) \times -2x = -4x + 4x^2$; diese Bestandtheile vom gegebenen Quadrate abgezogen, bleibt der Rest $+6x^2 - 12x^3 + 9x^4$. Betrachtet man nun $1-2x$ als

eine aufgefundene Wurzelnote und dividirt durch $2(1-2x)$ $= 2 \div 4x$ nach §. 41. 2) ein schickliches Glied jenes Restes, nämlich $+6x^2$: so hat man aus $\frac{6x^2}{2}$ den 3ten Wurzeltheil $= 3x^2$. Weil endlich jetzt $(2a + b)b$ $(2-4x+3x^2)3x^2 = 6x^2-12x^3+9x^4$ ist, und diese Größe, von jenem Reste abgezogen, keinen weiteren Rest läßt: so ist $1-2x+3x^2$ die vollständige Wurzel aus dem vorgegebenen Quadrate.

§. 68. Aufgabe. Eine mehrziffrige ganze Zahl, als Wurzel, zum Würfel zu erheben, und umgekehrt die Kubikwurzel wieder auszuziehen.

Auflösung. 1. a). Man multiplizirt entweder die gegebene Wurzel zweymal mit sich selbst (vermöge des allgemeinen Begriffes von Potenz §. 52.), oder man findet die Bestandtheile des gesuchten Würfels nach der Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§. 65.), indem man auch eine jede 2ziffrige Wurzel z. B. 25 unter der Form einer zweytheiligen Größe, nämlich $20+5$, folglich 25^3 unter der Form $(20+5)^3$ darstellen kann.

b). Die Formel läßt erkennen, daß die erste Wurzelnote $20(=a)$ ihren eigenen Würfel, als einzigen Bestandtheil, die folgende Wurzelnote $5(=b)$ aber 3 Bestandtheile im gesuchten Würfel geben müsse, nämlich 1) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der ersten Wurzelnote in die zweyte (einfach); 2) das dreyfache Produkt aus dem Quadrate der zweyten Wurzelnote in die vorhergehende (einfach) und 3) ihren eigenen Würfel. Und zwar folgen diese numerischen Bestandtheile, in wiefern man auf ihren Generalwerth sieht, nothwendig in der eben genannten Ordnung aufeinander. Denn die zweyte Wurzelnote $(5=b)$ gehört zu den Einern; die erste $(2$ oder $20 = a)$ zu den Zehnern, ihr Quadrat folglich

überhaupt zu den Hundertern; demnach drückt der erste Bestandtheil ($3a^2b$ oder a^2b) ein Produkt aus Hundersten in Einer, d. i. Hunderter; der zweyte Bestandtheil ($3ab^2$ oder ab^2) ein Produkt aus Zehnern in Einer, d. i. Zehner, und der dritte Bestandtheil (a^3) den Würfel von Einern, d. i. wieder Einer überhaupt aus.

c). Es giebt folglich die zweyte Wurzelnote wegen ihrer 3 Bestandtheile auch 3 neue Ziffernstellen im Würfel. Man erhält daher, wie oben beym Quadrate, für 25^3 oder $(20+5)^3$ die richtige Summe aller Bestandtheile, wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{rcl|l} a^3 & = & 8 & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ 3a^2b & = & 6 & 0\,\cdot\,\cdot \\ 3ab^2 & = & 1 & 5\,0\,\cdot \\ b^3 & = & & 1\,2\,5 \end{array}\right\} = 15\,|\,625.$$

d). Wie $10^3 = 10^2 \,.\, 10 = 1000$, oder $100^3 = 100^2 \,.\, 100 = 1000000$, u. s. w. ist; eben so ist auch $20^3 = 2^3 \,.\, 10^3 = 8.\ 1000 = 8000$, und $2500^3 = 25^3 .\ 100^3 = 15625.\ 1000000 = 15625000000$, u. s. w.; d. i. bey solchen gegebenen Wurzeln erhebt man nur die durch die geltenden Ziffern ausgedrückte Zahl zum Würfel, und fügt diesem statt einer Nulle in der Wurzel 3 Nullen bey. Es ist daher wieder umgekehrt $\sqrt{8\,|\,000} = 20$, und $\sqrt[3]{15\,|\,625\,|\,000\,|\,000} = 2500$.

e). Kömmt eine dritte Wurzelnote hinzu; hat man z. B. $257)^3 = (200 + 50 + 7)^3$ oder allgemein $(a+b+c)^3$, und setzt man $(a+b) = p$: so findet man wieder $(p+c)^3 = p^3 + 3p^2c + 3pc^2 + c^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$; d. i. auch die dritte Wurzelnote $7 = c$ giebt in Beziehung auf die Summe der ihr vorhergehenden Wurzelnoten dieselben 3 Bestandtheile im Würfel, welche die zweyte b in Beziehung auf die erste a giebt. Da dieselbe Schließ-

art wiederkehrt, wenn eine 4., 5te . . . Wurzelnote hinzukömmt: so giebt allgemein jede folgende Wurzelnote die 3 genannten Bestandtheile, folglich auch 3 neue Zifferstellen im Würfel.

Es ist also

$$257)^3 = \left\{\begin{array}{r|l|l} 8 & . \ . \ . & . \ . \ . \\ 6 & 0 \ . \ . & . \ . \ . \\ 1 & 5 \ 0 \ . & . \ . \ . \\ & 1 \ 2 \ 5 & . \ . \ . \\ 1 & 3 \ 1 \ 2 \ 5 & . \ . \\ .. & . \ 3 \ 6 \ 7 \ 5 & . \\ .. & . \ . \ . & 3 \ 4 \ 3 \end{array}\right\} = 16 \mid 974 \mid 593.$$

$(3.25^2.7 =)$

$(3.25.7^2 =)$

$(7^3 =)$

Eben so findet man die 3te Potenz von 1203, indem man setzt:

$$(3.120^2.3) = \left\{\begin{array}{r|l|l|l} 1 & & & \\ & 6 & & \\ & 12 & & \\ & & 8 & . \ . \ . \\ & 12 & 960 & 0 \\ & . \ . \ . & 32 & 40 \\ & . \ . \ . & & 27 \\ \hline 1 & 740 & 992 & 427 \end{array}\right. = 1203^3.$$

$(3.120.3^2) =$

$(3^3) =$

f). Wenn man daher solche Würfelzahlen von der Rechten gegen die Linke hin in Klassen theilt, indem man 3 Ziffern zu einer Klasse nimmt: so erhält man gerade soviele Klassen, als durch wieviele Ziffern die entsprechende Wurzel ausgedrückt ist.

2. Soll man daher umgekehrt die Kubikwurzel aus einer vorgegebenen vollkommnen oder wahren Würfelzahl wieder ausziehen: so erkennt man aus jener Eintheilung in Klassen, wieviele Wurzelnoten oder Wurzelziffern aufzufinden seyen. Indem man ferner alle Bestandtheile, welche jede Wurzelnote beym Erheben zum Würfel giebt, nachbildet und dieselben nach und nach von der gegebenen Würfelzahl wieder abzieht: so kann kein Rest weiter bleiben.

Beyspiel. Es sey aus 1740992427 die dritte Wurzel auszuziehen. Die Rechnung steht so:

1 | 740 | 992 | 427 | | 1203.

−1		
7,40:3.1²(=3)	3a²b = 6	3a²b = 43200. 3 = 129600
−728	3ab² = 12	3ab² = 3.120. 3² = 3240
129,92:3.12²	b² = 8	b³ = 3³ = 27
12924,27 : 3.120²(=43200)	728	12992427
−12992427		
0.		

Erläuterung. Die Eintheilung in Klassen zeigt, daß eine 4ziffrige ganze Zahl als Wurzel aufzufinden sey. Die erste Klasse zur Linken enthält den Würfel der ersten Wurzelnote; aber $\sqrt[3]{1}=1$, und $1^3=1$, also ist 1 (=1000) die erste Wurzelnote, und ihr Würfel von jener ersten Klasse abgezogen, läßt 0 als Rest. Die zweyte herabgesetzte Klasse 740 enthält die 3 Bestandtheile, welche nach b) die 2te (gesuchte) Wurzelnote im Würfel geben muß, und zwar ist durch die höchste Ziffer 7 der seinem Generalwerthe nach höchste Bestandtheil $3a^2b$ ausgedrückt (ebenfalls nach b). Weil nun in diesem Bestandtheile die 2te Wurzel (b) als einfacher Faktor vorkömmt, den man erhält, wenn man durch $3a^2$, d. i. durch das 3fache Quadrat der ersten gefundenen Wurzelnote den ersten Bestandtheil $3a^2b$ dividirt: so ist klar, warum man aus der herabgesetzten Klasse 740 die 2 letzten Ziffern abschneide, und setze $\frac{7}{3.\ 1^2}=\frac{3a^2b}{3a^2}=\frac{7}{3}=2=b.$

Die Rechnung zeigt die nachgebildeten Bestandtheile, welche diese Wurzel 2 im Würfel giebt. Da ihre Summe von 740 abgezogen werden kann: so ist dieses ein Zeichen, daß der höchste Quotient aus $\frac{7}{3}$ wirklich die gesuchte 2te Wurzelnote sey.

Indem man nun die aufgefundene Zahl 12 als eine gefundene Wurzelnote (als = a) betrachtet: sieht man leicht ein, daß durch dieselbe fortgesetzte Operation, wie die zweyte, so jede folgende Wurzelnote aufgefunden werde.

Praktischer Vortheil. Es bezeichne a überhaupt die vorhergehenden Wurzelnoten oder Wurzelziffern, b aber die folgende Wurzelziffer. Man setze ferner, es seyen bereits 2 Wurzelnoten aufgefunden: so ist, wie hinsichtlich der zweyten Wurzelnote, so für jede folgende Rechnung die Bildung des Faktors 3a und der Zahl $3a^2$, sowohl als Divisors, als auch als Faktors, nothwendig. Diese Berechnung schließt sich nun an die unmittelbar vorhergehende so an: 1) hinsichtlich der 2ten Wurzelnote hatte man berechnet $3a = p$, folglich muß man rücksichtlich der folgenden Wurzelnote berechnen $3(a.10 + b) = 3a.10 + 3b = p.10 + 3b$, d. i. man darf nur die Zahl = 3b unter die bekannte p so setzen, daß man jene rechts um eine Stelle hinausrückt. 2) Hinsichtlich der 2. Wurzelnote hatte man schon berechnet $3a^2 = q$, folglich muß man nun hinsichtlich der folgenden Wurzelnote b berechnen $3(a.10 + b)^2 = 3(a^2.10^2 + 2a.10.b + b^2) = 3a^2.10^2 + 6a.10.b + 3b^2$. Es ist aber $3a^2.10^2 = q$, wenn man den durch 10^2 angedeuteten Generalwerth einstweilen vernachläßiget; eben so ist $6a.10.b = 2.3a.b = p.2f$; folglich erhält man für die folgende Rechnung den Divisor oder Faktor $3a^2$, indem man p.2f so unter das schon bekannte q setzt, daß man wieder rechts um eine Ziffernstelle hinausrückt, und auf gleiche Weise mit der Zahl $3b^2$ verfährt. Die Summe dieser 3 so untereinander gesetzten Zahlen ist dann der gesuchte Divisor $3a^2$.

Beyspiel. Es sey die dritte Wurzel aus der Kubikzahl 12905114402816 zu ziehen.

Die Rechnung ist

12|905|114|402|816||23456.

-8

49,05 : 12 = 4

4167

7381,14

645904

922104,02

82309625

99007778,16

9900777816

0.

$3.12 = 36$

$3.2.3^2 = 54$

$3^3 = 27$

4167

Hier war also $p = 3a = 6$ und $3a^2 = 12$, man hat daher p. 10 $+ 3b = {}^{6}_{9}) = 69$, und

$3a^2 = q = 12$

p. $2b = 36$

$3b^2 = 27$

1587, als neuen Divisor.

Nun ist $\frac{7381}{1584} = 4$, als dritte Wurzelziffer; die Summe der nachgebildeten Bestandtheile = 645904 von 738114 abgezogen, bleibt der Rest 92210. Setzt man hiezu die 4te Klasse herab: so ist nun, um die 4te Wurzelziffer 5 aufzufinden, der Divisor für den Dividend 922104 zu berechnen. Für diese Rechnung ist p = 69, wie wir oben fanden, daher

$3a^2 = q = 1587$ (der vorige Divisor)

p. $2b = 552$ (= 69. 8)

$3b^2 = 48$

164268, neuer Divisor; der Quotient = 5.

Die Summe der mittels dieser Wurzelnote 5 nachgebildeten Bestandtheile = 82309625 von 92210402 abgezogen, und zum Reste = 9900777 die letzte Klasse 816 herabgesetzt, muß man für 99007778 den neuen Divisor suchen. Es ist erstens

p. 10 + 3b = 3a = 23. 3 = 69 (wie oben)
+ 3b = 3. 4 = 12
702 = p für die neue Rechnung.

Zweytens. $3a^2 = q = 164268$ (der vorige Divisor)
p. 2b = 7020 (= 702. 10)
$3b^2$ = 75 (= $3. 5^2$)
16497075, neuer Divisor, der Quotient ist 6, und die Summe der für 6 nachgebildeten Bestandtheile = unserer obigen letzten Zahl; also 23456 die wahre Kubikwurzel aus der gegebenen Zahl *).

Zusatz 1. Wie allgemein $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ist, so ist auch z. B. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$, oder $\left(\frac{13}{11}\right)^3 = \frac{13^3}{11^3} = \frac{2197}{1331}$; daher ist auch umgekehrt $\sqrt[3]{\frac{2197}{1331}} = \frac{\sqrt[3]{2197}}{\sqrt[3]{1313}} = \frac{13}{11}$, u. s. w. Wie man nämlich sowohl Zähler als Nenner eines zu kubirenden Bruches zur dritten Potenz erheben muß: so muß man auch umgekehrt aus einem gegebenen vulgären Bruche dadurch die Kubikwurzel ausziehen, daß man diese sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner sucht.

Ist die zu kubirende Zahl eine Dezimalzahl: so weiß man schon daraus, weil die Zahl zweymal mit sich selbst multiplizirt werden muß, daß man statt einer Dezimale in der Wurzel drey Dezimalen im Würfel haben müsse. Man kubirt daher die Dezimalzahl mit n Dezimalstellen, wie eine ganze, und notirt im gefundenen Würfel von der Rechten zur Linken 3n Dezimalstellen. So ist z. B. (weil $25^3 = 15625$) $0,25)^3 = 0,015625$; $2,5)^3 = 15,625$,

*) Vergl. »Systematisches Lehrbuch der Arithm. von Prof. Rothe.« Zweyt. Theil, S. 56.

und $(0,025)^3 = 0,000015625$. Soll man daher aus solchen Dezimalkubikzahlen die dritte Wurzel wieder ausziehen: so zeigt die gewöhnliche Eintheilung in Klassen nicht nur die Anzahl, sondern auch die Bedeutung der aufzufindenden Wurzelnoten oder Wurzelziffern *).

Zusatz 2. Ganz nach derselben Methode findet man die Kubikwurzel aus vielgliedrigen Buchstabengrößen, welche vollkommene Würfel sind, wie folgendes Beyspiel zeigt:

$$\sqrt[3]{(1-3x+6x^2-7x^3+6x^4-3x^5+x^6)} = 1-x+x^2$$

$$\begin{array}{l}
-1 \\
\hline
-3x+6x^2-7x^3 \\
-(-3x+3x^2-\ x^3) \\
\hline
+\ 3x^2-6x^3+6x^4-3x^5+x^6 \\
-(+3x^2-6x^3+6x^4-3x^5+x^6) \\
\hline
0.
\end{array}$$

Nämlich 1) $\sqrt[3]{1} = 1$ erste Wurzelnote); 2) $\frac{-3x}{3a^2}$ $= \frac{-3x^3}{3} = -x$ (zweyte Wurzelnote), und $3a^2b = -3x$; $3ab^2 = 3.-x^2 = 3x^2$ und $b^3 = -x^3$ sind die oben abzuziehenden Bestandtheile. Setzt man 3) zum Reste $3x^2-6x^3$ die 3 letzten Glieder des gegebenen Würfels, nimmt nun $(1-x) = a$, folglich $3(1-x)^2 = 3-6x+3x^2 = 3a^2$, und dividirt $3x^2$ durch 3: so hat man die dritte Wurzelnote $+x^2$, und die nachgebildeten Bestandtheile sind: $3a^2b = (3-6x+2x^2)x^2 = 3x^2-6x^3+3x^4$; ferner $3ab^2 = (3-3x)x^4 = 3x^4-3x^5$, und $b^3 = x^6$. Diese reducirten Bestandtheile von obigem Reste abgezogen, bleibt 0, daher ist $1-x+x^2$ die wahre gesuchte Wurzel.

*) Vergl. hiezu meine Ziffernrechnung (2te Ausg.) von S. 75 bis 109.

Anmerkung. Die obigen Potenzen von a+b (§. 65.) dienen als Formeln, die 4te, 5te... Wurzel auszuziehen, indem sie uns deutlich zeigen, welche Bestandtheile nachzubilden seyen.

§. 69. Aufgabe. Aus einer ganzen oder zehntheiligen unvollkommnen Quadrat- oder Würfelzahl die Wurzel näherungsweise auszuziehen.

Auflösung 1. Ob die zweyte oder dritte Wurzel irrational seyn werde (§§. 59. 61. Zus. 1.), erkennt man leicht, wenn die vorgegebene Zahl, als ganze betrachtet, nur eine Klasse bildet, indem es nur nöthig ist, mit der gegebenen Zahl die bekannten Quadrate oder Würfel der einziffrigen Zahlen zu vergleichen. Eben so leicht ist es in diesem Falle, die vorgegebene Irrationalzahl vorerst zum Theile von ihrer Irrationalität zu befreyen (§. 61. Zus. 2.). So ist vorerst $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{270} = 2\sqrt[3]{10}$; u. s. w. Wenn ferner die vorgegebene Zahl die Eintheilung in mehrere Klassen gestattet, und die letzte Ziffer der letzten Klasse (zur Rechten), welche keine Klasse Nullen ist, ist entweder 0, 2, 3, 7, 8, oder 0: so erkennt man sogleich, daß im ersten Falle die vorgegebene Zahl keine vollkommne Quadratzahl, und im zweyten Falle, daß sie keine vollkommne Würfelzahl sey, indem sich das Quadrat der letzten geltenden Wurzelziffer nicht mit einer jener ersten Ziffern, und der Würfel derselben nicht mit 0 enden kann.

In diesem Falle nun versucht man zuerst durch Zerlegung der gegebenen Zahl in ihre Faktoren, wozu man sich der in der Note zu § 44. angeführten Tafel bedienen kann, die theilweise Befreyung der Wurzel von ihrer Irrationalität, oder man sucht sogleich nach den in den 2 vorhergehenden §§. erörterten Methoden die verlangte Wurzel, so weit die Klassen der vorgegebenen Zahl es gestatten. Um sich nun durch fortgesetzte Operation dem

wahren Werthe der Wurzel, so weit man will, oder so weit es die Genauigkeit der speziellen Rechnung fodert, zu nähern, setzt man zum Reste der letzten Klasse und so zu jedem folgenden Reste eine Klasse Nullen. So ist, weil $2 = 2,00000\ldots$ ist, $\sqrt{2} = \sqrt{2,|00|00|00|\ldots} = 1,4142135\ldots$, daher auch $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4,2426405\ldots$; aber $\sqrt{0,2} = \sqrt{0,|20|00|00|\ldots} = 0,44721\ldots$ und $\sqrt{0,002} = \sqrt{0,|00|20|00|\ldots} = 0,0447\ldots$

Es ist ferner $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3,000|000|000|\ldots} = 1,442\ldots$ $= 1,442$, daher $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3} = 2,884\ldots$; aber $\sqrt[3]{0,3} = \sqrt[3]{0,|300|000|\ldots} = 0,669\ldots$, und $\sqrt[3]{0,0003} = 0,0669\ldots$

Es ist ferner $\sqrt[3]{97069} = \sqrt[3]{7.7.7.283} = 7\sqrt[3]{283} = 7.6,5654\ldots = 45,9578\ldots$, und $\sqrt{238612} = \sqrt{2^2.11^2.17.29} = 22\sqrt{493} = 22.22,2036\ldots = 488,4792\ldots$

Eben so ist $\sqrt{0,238612} = 0,4884792\ldots$ und $\sqrt[3]{0,97069} = 0,459578\ldots$

Auflösung 2. Man drücke die vorgegebene Zahl, aus der die Wurzel zu ziehen ist, durch ein Binomium aus, dessen erstes Glied eine vollkommene Quadrat- oder Würfelzahl ist, und wende dann auf die Wurzel dieses Binomiums die im §. 66. Zus. 4. dargestellte Entwickelung von $\sqrt[s]{(a \pm b)}$ an.

So ist $\sqrt{10} = \sqrt{(9+1)}$, wo also $s=2$; $a=9$; $b=1$ und $\sqrt[s]{a} = \sqrt{9} = 3$ ist. Man hat daher $\sqrt{10} = 3\left(1 + \frac{1}{2.9} - \frac{1}{8.9^2} + \frac{1}{16.9^3} - \frac{5}{128.9^4} + \ldots\right) = 3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3888} + \ldots - \left(\frac{1}{216} + \frac{5}{279936} + \ldots\right)$. Die beyden ersten Brüche auf einerley Nenner gebracht und 3 addirt, hat man

$\frac{73878}{23328} = 3,1669239$; die 2 letzten Brüche sind reduzirt und addirt $= \frac{281016}{60466176} = 0,0046475$; diese Zahl von ersterer abgezogen, hat man $\sqrt{10} = 3,1622764$. Will man diesen noch bis zur 5. Dezimalstelle richtigen Werth noch genauer finden: so muß man nach obiger Formel noch einige Glieder entwickeln.

Es zeigt übrigens die obige Entwickelung unseres Beyspieles, daß man die allgemeine Formel eigends für dergleichen Fälle bequem so darstellen könne:

$$\sqrt{(a^2 \pm b)} = a\left(1 \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a^2} - \frac{1}{2.2^2}\cdot\frac{b^2}{a^4} \pm \ldots\right)$$

$$= a \pm \frac{b}{2.a} - \frac{b^2}{8.a^3} \pm \frac{b^3}{16.a^5} - \frac{5b^4}{128.a^7} \ldots$$

Eben so geht, wenn $s = 3$ ist, die allgemeine Formel in diese über:

$$\sqrt{(a^3 \pm b)} = a \pm \frac{b}{3.a^2} - \frac{b^2}{9.a^5} \pm \frac{5b^3}{81.a^8} - \frac{10.b^4}{243.a^{11}} \pm \ldots$$

Es ist vermöge dieser Formel z. B. $\sqrt[3]{25} = \sqrt{(3^3 - 2)}$

$$= 3 - \frac{2}{3.3^2} - \frac{2^2}{9.3^5} - \frac{5.2^3}{81.3^8} - \frac{10.2^4}{243.3^{11}} \ldots$$

$$= 3 - \begin{cases} 0,\ 07407407\ \ldots \\ 0,\ 00182899\ \ldots \\ 0,\ 00007527\ \ldots \\ 0,\ 00000372\ \ldots \end{cases} = 2,92401795.$$

Dieser Näherungswerth von $\sqrt[3]{25}$ wird erst in der 7. Dezimale, die 7 seyn sollte, fehlerhaft.

Vermittels der im §. 66. Zus. 6. für $\sqrt{(a^2 \pm y)}$ entwickelten Formel findet man ebenfalls, wenn man die 6 Glieder im Einschlusse berechnet, $\sqrt{10} = 3(1,05409230) = 3,1622769$, und eben so findet man mittels der eben-

das. für $\sqrt[3]{(a^3 \pm y)}$ entwickelten Formel, wenn man die 5 ersten Glieder berechnet, $\sqrt[3]{25} = 3(0{,}97466903) = 2{,}92400709$. Es erhellt, daß diese letzteren Formeln weniger schnell zum Ziele führen, als jene ersteren.

Auflösung 3. Man setze, die zwischen $r+1$ und $r-1$ fallende nte Wurzel aus einer gegebenen Zahl a sey $= r+x$, d. i. $+$ einem ächten Bruche, so daß

$$a = (r+x)^n = r^n + nr^{n-1}x + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} r^{n-2}x^2 \ldots$$

näherungsweise sey; man setze ferner, daß die Zahl a schon ziemlich nahe durch die 2 ersten Glieder dieser Reihe dargestellt werde, indem die folgenden Glieder immer höhere Potenzen des ächten Bruches x enthalten: so wird man nun aus $a = r^n + nr^{n-1}x$ diesen Bruch x entwickeln können. Zieht man nämlich r^n auf beyden Seiten ab: so hat man $a - r^n = nr^{n-1}x$; dividirt man ferner Alles durch nr^{n-1}: so ist $x = \frac{a-r^n}{nr^{n-1}}$, folglich da $\sqrt[n]{a} = r+x$ gesetzt wurde, hat man durch Substit.

$$\sqrt[n]{a} = r + \frac{a-r^n}{nr^{n-1}} = \frac{nr^n + a - r^n}{nr^{n-1}} = \frac{a+(n-1)r^n}{nr^{n-1}}.$$

Diese allgemeine Näherungsformel geht für $n=2$ und $n=3$ in diese specielle Formeln über:

1) $\sqrt{a} = \frac{a+r^2}{2r}$; 2) $\sqrt[3]{a} = \frac{a+2r^3}{3r^2}$.

Gebrauch dieser Formeln. Es sey der genäherte Werth von $\sqrt{10}$ zu finden. Hier ist $a=10$, $r=3$, folglich ist $\sqrt{10} = \frac{10+9}{6} = 3{,}166\ldots$; ein Werth, der schon in der 3. Dezimale zu groß ist. Um daher $\sqrt{10}$ noch genauer zu finden, setze man statt x den

Werth 3, 16 in die Formel: so hat man $\sqrt{10} = \frac{10+3,16)^2}{2.\ 3,\ 16}$

$= \frac{19,9856}{6,\ 32} = 3,\ 162278\ldots$ Diesen bis zur Dezimale 8 richtigen Werth abermals statt x in obiger Formel substituirt, würde $\sqrt{10}$ noch genauer dargestellt.

Eben so ist $\sqrt[3]{25} = \frac{25+2.3^3}{3.\ 3^2} = \frac{79}{27} = 2,926\ldots$ und diesen Werth statt x substituirt, hat man $\sqrt[3]{25} = \frac{25+2.(2,926)^3}{3.(2,926)^2} = \frac{75,101657552}{25,684428} = 2,92401\ldots$

Anmerkung. Um den genäherten Werth einer Quadratwurzel zu finden, kann man sich mit Vortheil auch der stetigen Brüche bedienen. Es sey nämlich allgemein eine solche Irrationalzahl durch $\sqrt{(a^2+b)}$ vorgestellt. Setzt man nun $\sqrt{(a^2+b)} = a+x$ und erhebt beyde Größen zum Quadrat: so hat man $a^2+b = a^2+2ax+x^2$, oder, indem man a^2 auf beyden Seiten der Gleichung abzieht, und dann reducirt, $b = (2a+x)x$; folglich ist

$$x = \frac{b}{2a+x} = \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+x}}$$

$$= \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{2a+x}}}$$

$$= \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\frac{b}{2a+}}}}}$$

$$\ldots\ldots$$

Indem man nämlich beständig $\frac{b}{2a+x}$ statt x substituiren kann: sieht man deutlich, daß der Kettenbruch ohne Aufhören auf gleiche Weise fortgesetzt werden könne.

Nach dieser Formel ist

1) $\sqrt{23} = \sqrt{(4^2+7)} = 4 + \cfrac{7}{8+\cfrac{7}{8+\cfrac{7}{8+\cfrac{7}{8+}}}}$ . . . .

2) $\sqrt{37} = \sqrt{(6^2+1)} = 6 + \cfrac{1}{12+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{12+}}}}$ . . . .

3) $\sqrt{47} = \sqrt{(6^2+11)} = 6 + \cfrac{11}{12+\cfrac{11}{12+\cfrac{11}{12+}}}$ . . . .

Die aus diesen Kettenbrüchen (vergl. die Anmerk. zu §. 48.) entwickelten Theilbrüche sind die genäherten Werthe der gesuchten Wurzel.

Diese Theilbrüche aus 1) sind: $\frac{39}{8}$; $\frac{340}{71}$; $\frac{2993}{624}$; $\frac{26324}{5489}$; . . . oder, in Dezimalzahlen verwandelt, resp. 4, 8 . .; 4, 78 . .; 4, 796 . .; 4, 7955... Da der erste ächte Bruch $\frac{7}{8}$ etwas zu groß ist (vergl. das Ende der vorhin citirten Anmerk.): so erhellt, daß diese Zahlen 4, 8; 4, 78; . . . abwechselnd einen zu großen und zu kleinen Werth unserer gesuchten Wurzel darstellen. Da in diesen Kettenbrüchen Zähler und Nenner der Brüche konstant sind: so findet man jeden folgenden Theilbruch leicht auf folgende Weise: zu dem konstanten Nenner (8) addire man den ächten Bruch, der zur Wurzel, als ganzen Zahl (4), addirt, den vorhergehenden Theilbruch gegeben hatte; den erhaltenen unächten und

nun umgekehrten Bruch multiplizire man mit dem konstanten Zähler (7) und addire das Produkt zur Wurzel (4). So war zuerst $\frac{7}{8}+4=\frac{39}{8}$; um nun den 2. Theilbruch zu finden, setzt man $8+\frac{7}{8}=\frac{71}{8}$; dann $\frac{8}{71}\times 7 = \frac{56}{71}$, endlich $\frac{56}{71}+4=\frac{340}{71}$. Um den 3. Theilbruch zu finden, hat man eben so $8+\frac{56}{71}=\frac{624}{71}$; dann $\frac{71}{624}\times 7 \left(=\frac{497}{624}\right)+4=\frac{2993}{624}$, u. s. w.

Auf dieselbe Weise findet man aus 2) die Theilbrüche: $\frac{73}{12}$; $\frac{882}{145}$; $\frac{10657}{1752}$; $\frac{128766}{21169}$; . . . oder resp. 6, 083 . . .; 6, 08275 . . .; 6, 08276255 . . .; 6, 0827625301 . . . — Aus 3) sind eben so die Theilbrüche: $\frac{83}{12}$; $\frac{1062}{155}$; $\frac{13657}{1992}$; $\frac{175566}{25609}$; . . . oder resp. 6, 9 . . .; 6, 851 . . . 6, 8559 . . .; 6, 85563 . . . Jede dieser Zahlen ist der genäherte, bis zur letzten Dezimale (excl.) richtige, Werth der gesuchten Wurzel. Gleiches gilt für die in 1) und 2) entwickelten Werthe.

Diese Beyspiele zeigen, daß man sich dem genaueren Werthe der Wurzel um so schneller nähere, je kleiner die Glieder des entsprechenden Kettenbruches sind. Um dieses fast immer zu bewirken, setze man auch $\sqrt{(a^2-b)} = a-x$, woraus man, wie oben, $-b = -2ax+x^2 = -x(2a-x)$, folglich $-x = -\frac{b}{2a-x} = -\frac{b}{2a-\frac{b}{2a-}}$ . . .

demnach $\sqrt{(a^2-b)} = a - x = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cdots}}}$

findet. Setzt man dieser Formel gemäß $\sqrt{47} = \sqrt{(7^2-2)}$

$$= 7 - \cfrac{2}{14 - \cfrac{2}{14 - \cfrac{2}{14 - \cdots}}}$$

(wobey man sich hüten muß, die Glieder $\frac{2}{14}$ in $\frac{1}{7}$ zu verwandeln): so erhält man die Theilbrüche: $\frac{96}{14}$; $\frac{1330}{194}$; $\frac{18428}{2688}$; .... (nach derselben Methode, wie oben, nur daß man jetzt die Subtraktion statt der Addition anwendet), oder resp. 6, 857...; 6, 85567...; 6, 8556547... Dieser 3te Theilbruch ist schon ein genauerer Werth der gesuchten Wurzel, als vorhin der 4te Theilbruch *).

§. 70. Aufgabe. Quotienten, wie im Zusatz 3. des §. 41., durch unendliche Reihen darzustellen.

Auflösung. Es sey 1) $\frac{x^2}{x^2 - y^2}$ durch eine unendliche Reihe darzustellen. Da diese Größe auch durch $x^2(x^2-y^2)^{-1}$ ausgedrückt werden kann: so hat man mittels der Formel im Zus. 1. des §. 66., indem man x^2 statt a, y^2 statt b, und 1 statt m setzt, die Reihe:

*) Wie schon die Mathematiker des 16. Jahrh., z. B. Lucas de Burgos und Juan de Ortega, diese Näherungen mit Hilfe ächter vulgärer Brüche zu erhalten suchten, habe ich in meiner Ziffernrechn. (2te Aufl. S. 143.) angeführt und erörtert.

$(x^2-y^2)^{-1} = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^4}{x^4}+\frac{y^6}{x^6}\ldots\right)$; daher

$$x^2(x^2-y^2)^{-1} = 1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^4}{x^4}+\ldots$$

Weil 2) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \sqrt{(x^2+y^2)^{-1}} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist: so entwickelt man mittels der Formel im Zuſ. 7. des §. 66., indem man 1 ſtatt r, und 2 ſtatt s, ... ſetzt, die Reihe: $\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{3y^4}{2.2^2.x^4}-\frac{5y^6}{2.2^3.x^6}+\frac{35y^8}{2.2^4.x^8}-\ldots\right) = \frac{1}{x}-\frac{y^2}{2x^3}+\frac{3y^4}{8x^5}-\frac{5y^6}{16x^7}+\frac{35y^8}{32x^9}-\ldots$

Fünfter Abschnitt.

Von

den Gleichungen*).

§. 71. **Erklärung.** Der doppelte Ausdruck einer und derselben Größe heißt **Gleichung** (aequatio). Beyde Ausdrücke, vom Gleichheitszeichen gesöndert, machen die **2 Seiten** (membra) der Gleichung, und die durch + und — auf jeder Seite der Gleichung verbundenen Größen ihre **Glieder** (termini) aus.

So sind der Gleichung $x-a=b+d$ Seiten $x-a$ und $b+d$; die Glieder der ersten Seite x und a, der zweyten b und d. Ist $a=2$, $b=3$, $d=4$ und $x=9$: so hat man durch diese Gleichung blos den doppelten Ausdruck derselben Zahl 7.

§. 72. **Erklärung.** Der Satz, welcher das Auffinden einer unbekannten oder relativen Größe sammt den Bedingungen ausspricht, von welchen erstere abhängen soll, heißt **Aufgabe** (problema). Die angegebenen Bedingungen ganz der Aufgabe gemäß mittels der arithmetischen Zeichen so ordnen oder formen, daß ein doppelter Ausdruck einer und derselben Größe entsteht, heißt die Aufgabe **ansetzen**, oder die Gleichung **formiren** (format. aequat.).

*) Man erinnere sich hier des im §. 17. der Einleitung Gesagten.

Die angegebenen Bedingungen machen das Bekannte der Gleichung aus. Dahin gehören nicht nur die absoluten oder bekannten Größen selbst a, b... sondern auch die Art ihrer arithmetischen Verbindung mit den unbekannten Größen x, y, z.

Das Bilden der Gleichung ist Werk der Urtheilskraft, was folglich nicht gelehrt, sondern nur durch Uebung an Beyspielen erleichtert werden kann. Die den Anfänger hier einigermaßen leitende Vorschrift ist indessen folgende: „Man betrachte die unbekannte Größe als bekannt, behandle sie dann, wie die Aufgabe fordert, und suche dadurch eine Größe auf doppelte Art auszudrücken.“ Hat man z. B. die Aufgabe, eine Zahl zu finden, die durch 3 dividirt und mit 2 multiplizirt die Zahl 4 giebt, so würde die Gleichung so aufgesetzt werden müssen: $\frac{x}{3} \cdot 2 = 4$; oder setzt man $3 = a$, $2 = b$, $4 = c$: so hat man die allgemeine Gleichung $\frac{x}{a} \cdot b = c$, woraus einleuchtet, wie sich der Werth für x ändern müsse, sobald man a, b, c andere Zahlen unter denselben Verbindungsbedingungen bedeuten läßt.

Das Gesetz der Abhängigkeit der unbekannten Größe von den bekannten Größen durch einen algebraischen Ausdruck anschaulich darstellen, heißt die Gleichung auflösen (resolutio aequat.). Man betrachtet diese als aufgelöst, wenn man die unbekannte Größe x mit dem Zeichen + allein auf der einen Seite der Gleichung, und alle bekannten Größen auf der andern Seite nach algebraischen Grundsätzen erhalten hat. So wäre obige Gleichung aufgelöst, wenn man den Ausdruck $x = \frac{4.3}{2}$ oder $x = \frac{ac}{b}$ gefunden hätte.

Die Prüfung endlich oder Probe, ob die Gleichung richtig aufgelöst sey, geschieht durch Substitution des oder der für x gefundenen Werthe in der der Aufgabe gemäß formirten Gleichung. Erhält man dadurch wirklich den doppelten Ausdruck, wie ihn die Aufgabe fordert, so ist man richtig verfahren. So ist, für x den gefundenen Werth 6 oder $\frac{ac}{b}$ substituirt, $\frac{6}{3}$. 2 oder $\left(\frac{ac}{b} : a\right) b = c$, d. i. $4 = 4$, oder $c = c$.

Jeder Werth der unbekannten Größe in der Gleichung, durch dessen Bestimmung sie aufgelöst wird, heißt auch Wurzel der Gleichung. Oder wenn man die vorgegebene Gleichung dadurch auf Null bringt, daß man eine Seite sowohl von sich selbst, als von der andern Seite abzieht: so ist jeder Werth von x, welcher, statt x nun substituirt, die Gleichung $0 = 0$ hervorbringt, oder die Gleichung zu Null macht, eine wahre Wurzel der Gleichung. Z. B. obige Gleichung $\frac{x}{3} \cdot 2 = 4$ wird auf 0 gebracht, wenn man (nach Axiom 2) unter VII. §. 24.) setzt: $\frac{x}{3} \cdot 2 - 4 = 4 - 4$, d. i. $\frac{x}{3} \cdot 2 - 4 = 0$. Weil nun der für x substituirte Werth $= 6$ diese Gleichung zu Null macht, indem man hat $\frac{6}{3} \cdot 2 - 4 = 0$, d. i. $0 = 0$: so ist x eine wahre Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

§. 73. Erklärung. Enthält die Aufgabe alle Bedingungen, durch welche nach einem gewissen Gesetze der einzige Werth der unbekannten Größe bestimmt wird: so heißt die Aufgabe eine bestimmte (probl. determinatum), im entgegengesetzten Falle heißt sie unbestimmt (probl. indeterminatum). Letztere ist ent-

weder ganz oder zum Theil unbestimmt. Die ganz unbestimmte Aufgabe, inwiefern sie eine oder mehrere, zur Bestimmung des einzigen Werthes der unbekannten Größen nothwendige, Bedingungen nicht angiebt, läßt eine unendliche, die zum Theile nur unbestimmte, eine endliche oder bestimmte Anzahl von Werthen für die unbekannten Größen zu. Sagt z. B. die Aufgabe, man solle 2 Zahlen finden, deren Summe $=24$ sey: so findet man aus $x+y=24$, indem man auf beyden Seiten y abzieht, $x=24-y$, wo man denn sowohl für y unendlich viele Zahlen substituiren, als demnach auch unendlich viele Werthe für x erhalten kann, deren jeder der Aufgabe Genüge thut. Wäre aber die Bedingung zugleich angegeben, daß man ganze, positive Zahlen haben wolle: so erhielte man, indem man für y nach der Reihe nur 0, 1, 2, 3...24 substituiren dürfte, im Ganzen auch nur 25 entsprechende Werthe für x.

Inwiefern endlich die Aufgabe eine Bedingung enthält, die zur Formation einer neuen Gleichung führt dieselbe Bedingung aber durch die andere schon mitgegeben, folglich auch die neue Gleichung eigentlich schon in der vorher gebildeten enthalten ist: so ist die Aufgabe mehr als bestimmt (probl. plus quam determinatum), und dann, als solche, unbestimmt. Führte z. B. eine Aufgabe zu den 2 Gleichungen: $x+\frac{4}{5}y=2$, $6x+8y=12$: so erhellt, daß aus der ersten Gleichung, indem man ihre Glieder mit 6 multiplizirt, die 2te resultirt, daß es daher eben soviel ist, als hätte man, wie vorhin, nur eine Gleichung mit 2 unbekannten Größen. Woran man eine solche Gleichung erkennt, und wie man bey ihrer Auflösung verfährt, soll weiter unten vorkommen.

Das unbestimmte Problem erkennt man, den letzten Fall ausgenommen, sogleich daran, wenn mehrere unbekannten Größen sollen gefunden werden, als Gleichungen angegeben sind.

Auf dem Grunde dieser Erklärung hat man denn auch die niedere Algebra in die bestimmte und unbestimmte eingetheilt (vergl. §. 21.).

§. 74. Erklärung. Um die Gleichungen zu unterscheiden, hat man den Ausdruck „Grad“ eingeführt. Der Grad einer Gleichung wird nach der größten Summe, welche die Exponenten der unbekannten Größen in einem und demselben Gliede bilden, benannt. So sind $ax+b=c$, $x^2=c$, $x^2+ax^3=b\ldots$, $x^m=d$ Gleichungen vom 1ten, 2ten, 3ten ... mten Grade. Aber auch $ay^2+bx^2y=c$ ist eine Gleichung vom 3ten Grade.

Die Gleichung ist ferner von reinem Grade, wenn die genannte Summe in jedem Gliede der Gleichung, welches die unbekannten Größen enthält, dieselbe ist, sonst heißt sie eine Gleichung von unreinem oder gemischtem Grade: so sind $x^2+ax^2=c$, $\frac{x^3}{c}-mx^3-d=nx^3$ Gleichungen von 2tem, 3tem reinen Grade; aber $x^2-ax=d$, $x^3+bx^2-cx=0$ sind Gleichungen von 2tem, 3tem gemischten Grade. Es bedeutet dasselbe, wenn man spricht: eine gemischte quadratische, cubische Gleichung.

Gleichungen von erstem Grade nennt man auch einfache; alle übrigen befaßt man unter dem Namen „zusammengesetzte“ Gleichungen.

Weil man jede Gleichung, wie $x^m+x^{\frac{m}{2}}=a$ nach derselben Methode auflösen kann, nach welcher die niedere Algebra die Gleichung $x^2+x=a$ auflösen lehrt: so nennt man überhaupt eine gemischte quadratische Gleichung diejenige, in deren verschiedenen Gliedern dieselbe unbekannte Größe unter 2 Exponenten vorkömmt, deren kleinerer die Hälfte des größeren ist.

Uebrigens leiten Gleichungen von 1t. und 2t. reinen

Grade immer auf eine quadratische Gleichung; z. B. $x+y=c$ und $xy=f$.

Anmerkung. Die niedere Algebra beschäftigt sich bloß mit der Darstellung der Methoden, nach welchen jede reine und gemischte quadratische Gleichung aufgelöst wird. Die Prinzipien, welche sie aufstellt, eine solche einzelne Gleichung, welche irgend einer Frage gemäß eine unbekannte Größe enthält, zu lösen, machen das Fundament der niedern Analysis aus. Nach Festsetzung derselben Prinzipien hat sie nur noch die Methoden nachzuweisen, wie man, wenn mehrere Gleichungen vorkommen, eine unbekannte Größe nach der andern aus den Gleichungen wegschafft, bis man auf eine Gleichung kömmt, die nur noch eine unbekannte Größe enthält. Diese Methoden heißen die Methoden der Elimination.

I.

Bestimmte Analytik.

A.

Grundregeln zur Auflösung einfacher Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

§. 75. Erste Regel. Um die mit der unbekannten Größe durch $+$ oder $-$ auf einer Seite der Gleichung verbundenen bekannten Größen zu trennen, oder die auf den 2 Seiten der Gleichung sich befindende unbekannte Größe auf eine Seite zu bringen, wird das fragliche Glied jedesmal mit verändertem Zeichen auf die andere Seite der Gleichung gebracht nach §. 24. Ax. 1), 2) unter VII.

Beyspiel.

$3x \pm a = b - 2x$. Um a zu trennen, setzt man
$3x = b \mp a - 2x$; um die unbek. Gr. zu vereinigen, setzt man
$3x + 2x = b \mp a$; durch Reduktion ist $5x = b \mp a$.

Zusatz 1. Man bedarf dieser Versetzung (metathesis) und nachherigen Reduktion nicht, wenn auf bey-

den Seiten der Gleichung einerley Buchstabengrößen vorkommen. Haben sie nämlich einerley Zeichen: so darf man nur die kleinere Größe, die man auf einer Seite wegläßt, auch auf der andern weglassen. Z. B. $5x+8a=5a+6x$, woraus auf der Stelle $3a=x$ wird. Haben solche Größen verschiedene Zeichen: so vereinigt man sie sogleich in eine, z. B. $3a-4x+7b=8x+3a-2b$, woraus sogleich $9b=12x$ erhalten wird.

Zusatz 2. Hat man $-x=-a$: so kann man auch setzen $+x=+a$. Will man eben so in $3a-x+b=c-d$ die Größe x mit dem Zeichen + haben: so setzt man nur $x-3a-b=d-c$. Es ist nämlich dieses nichts anders, als ein Versetzen der ganzen Seiten einer Gleichung, und hieraus erhellt zugleich, daß, wenn $-a-b=0$ ist, auch $a+b=0$, und eben so $a-b=0$ gleichbedeutend sey mit $-a+b=0$.

§. 76. Zweyte Regel. Die Coeffizienten oder überhaupt die Faktoren der unbekannten Größe werden dadurch von ihr getrennt, daß man die übrigen Glieder der Gleichung durch alle jene Faktoren dividirt nach §. 24. Nr. 4) unter VII.

Beyspiel. Aus $4x=a-b$ wird $x=\frac{a-b}{4}$; und aus $ax+bx=c$ wird $x=\frac{c}{a+b}$. Man kann nämlich statt $ax+bx$ schreiben $(a+b)x$.

Zusatz. Man bringt eine Gleichung auf einen kürzeren Ausdruck, wenn man die allen Gliedern gemeinschaftliche Größe wegläßt; z. B. statt $15b^2=24ab-3bx$ hat man $5b=8a-x$.

Eben dadurch kann man oft eine dem Scheine nach zusammengesetzte Gleichung auf eine einfache bringen;

z. B. $ax^2 + x = bx - cx^2$, oder was daſſelbe iſt, $(a+c)x^2 = (b-1)x$, und durch Reduktion $(a+c)x = b-1$, daher $x = \frac{b-1}{a+c}$.

§. 77. Dritte Regel. Kömmt die unbekannte Größe in Brüchen als Zähler oder Renner vor: ſo bringt man dadurch die Brüche weg, daß man jedes Glied, worin x vorkömmt, mit dem Faktum der übrigen Renner, jedes Glied der Gleichung aber, in welchem x nicht vorkömmt, mit dem Produkte aller Renner multiplizirt nach §. 24. Ax. 3) unter VII.

Beyſpiel. $\frac{a}{x} + b = c$ giebt nach der Regel

$a + bx = cx$; und aus $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} - d = m + n$ wird

$bcx + acx - abx - abcd = abcm + abcn$; woraus

$x = \frac{abcd + abcm + abcn}{bc + ac - ab}$.

Anmerkung. Aus dem, was in der Einleitung von den mit + und − bezeichneten Größen geſagt iſt, ſieht man von ſelbſt ein, daß wenn man einen mit − bezeichneten Werth für die unbekannte Größe findet, dieſes anzeigt, daß die durch x der Aufgabe gemäß bezeichnete Größe eine Bedeutung oder Eigenſchaft habe, welche derjenigen gerade entgegengeſetzt iſt, die man vorausgeſetzt hatte. Z. B. man ſoll eine Zahl finden, die zu 12 addirt 8 giebt. Hier iſt $x + 12 = 8$, alſo $x = -4$, oder $-x = 4$. Hieraus ſchließt man, daß x, welches man der Vorausſetzung gemäß hätte addiren ſollen, von 12 müſſe abgezogen werden, wenn die Aufgabe zuläßig ſeyn ſoll.

Eben ſo erhellt, daß, um bey der Formatien der Gleichung eine Größe im entgegengeſetzten Sinne zu nehmen, dieſelbe mit dem Zeichen — müſſe geſetzt werden. Z. B. ein Bote A geht von Würzburg nach Bamberg, und macht täglich 5 Stunden, ein

anderer B, der täglich 3 Stunden macht, aber einen Tag früher weggieng, geht von Bamberg nach Würzburg, wann werden beyde, wenn ein Ort von dem andern 18 Stunden entfernt ist, zusammentreffen?

Setzen wir hier die Zeit für B, bis er A begegnet, positiv, so geht er $+x$ Tage; also macht er $3x$ Stunden, bis er A begegnet. Weil A 1 Tag später ausgeht, also $x-1$ Tag reiset: so macht er $5(x-1)$ St., bis er B begegnet. Weil endlich die von beyden zurückgelegte Stundenzahl der Entfernung beyder Orte in dem Augenblicke gleich seyn muß, wo sie einander begegnen, so hat man die Gleichung $3x+5x-5=18$, also $x=\frac{23}{8}$

$= 2\frac{7}{8}$ Tage, in welcher Zeit A und B einander begegnen.

Anwendung der gegebenen Regeln.

§. 78. Aufgabe 1. A hat eine gewisse Summe Geldes, die nach Abzug von 100 fl., welche für seine Familie verwendet werden, jährlich um den dritten Theil zunimmt. Nach 3 Jahren ist A noch einmal so reich. Wie groß war im Anfange jene Summe, oder wie groß ist der Zuwachs?

Anleitung zur Formation der Gleichung.

A hat eine gewisse Summe Geldes	x
Davon verwendet er im 1t. J. 100 fl.	x—100
Das übrige wächst um $\frac{1}{3}$	$x-100+\frac{x-100}{3}$ oder $\frac{4x-400}{3}$
Im 2t. J. zieht er weg 100 fl.	$\frac{4x-400}{3}-100$ oder $\frac{4x-700}{3}$
Das übrige wächst um $\frac{1}{3}$	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$ oder $\frac{16x-2800}{9}$
Ebenso giebt er im 3t. J. aus 100 fl.	$\frac{16x-2800}{9}-100$ oder $\frac{16x-3700}{9}$
Mit dem übrigen gewinnt er $\frac{1}{3}$	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$ oder $\frac{64x-14800}{27}$
Er wird noch einmal so reich als im Anfange	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

Auflösung. Die Antwort auf die Frage giebt also die Resolution der einfachen Gleichung $\frac{64y-14800}{27}$ $=2x$, woraus $x=1480$ fl. gefunden wird.

§. 79. Aufgabe 2. Es seyen 10000 fl. so zu vertheilen: daß A 100 fl. mehr als B, und B 200 fl. mehr als C, und C 500 mehr als D erhält, wieviel bekömmt jeder?

Anleitung zur Formation der Gleichung.

Antheil für D = x
- - - - C = x + 500
- - - - B = x + 500 + 200
- - - - A = x + 700 + 100

Summe der Antheile = 4x + 1700 + 300

Die Summe aller Antheile muß gleich seyn der zu vertheilenden Summe,

Aufl. also $4x + 2000 = 10000$, woraus x = dem Antheile für D = 2000 gefunden wird.

Probe. Antheil für D = x = 2000
- - - - C = x + 500 = 2500
- - - - B = x + 700 = 2700
- - - - A = x + 800 = 2800

Summe der Antheile - - - - = 10000 fl.

Zusatz. Es hält nun nicht schwer, die gehörige Gleichung zu formiren, wenn es in einer ähnlichen Aufgabe statt „mehr“ hieße „weniger“. Wären ferner die Bedingungen einer Aufgabe so, daß von einer Summe von 20000 fl. = s D erhielte x; C das 3fache des D weniger 100 = a; B das 4fache des C weniger 200 = b; A das 5fache des B weniger 300 = c: so formirte man auf vorige Art die allgemeine Gleichung.

x | + 3x − a | + 12x − 4a − b | + 60x − 20a − 5b − c = s.

Nicht anders werden die Gleichungen formirt, wenn statt ganzer Zahlen, wie in der letzten Aufgabe, Brüche, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ angegeben werden.

Beyspiel 1. Es soll eine Summe Geldes so getheilt werden, daß A die Hälfte der Summe — 200 fl., B den 3ten Theil — 50, C den 4ten Theil — 10 fl. bekömmt: wie groß ist jene Summe, und welches ist der Antheil eines jeden?

Formation der Gleichung.

Theil für A $= \frac{1}{2}x - 200$
- - - B $= \frac{1}{3}x - 50$
- - - C $= \frac{1}{4}x - 10$

Summe $\frac{13}{12}x - 260 = x$

Aufl. $13x - 3120 = 12x$; also $3120 = x =$ der gesuchten Summe, woraus der Antheil eines jeden leicht zu finden ist.

Beyspiel 2. Ein Vater hinterließ 16200 fl. Vermögen, 3 Söhne, 5 Töchter, welche sich mit der Mutter in das Vermögen so theilen sollen: die Mutter erhält den 4. Theil vom Ganzen voraus, vom bleibenden Reste dann jeder Sohn 500 fl. mehr, als die Mutter, und jede Tochter $1\frac{1}{2}$ soviel, als jeder Sohn. Wieviel empfieng jedes Kind, und wieviel die Mutter?

Antwort. Den 4. Theil $=$ 4050 von 16200 abgezogen, ist der zu theilende Rest $=$ 12150 fl. Setzt man nun den Antheil der Mutter am Reste $= x$: so bekömmt jeder Sohn $(x+500)$; also ist der Antheil der 3 Söhne $= 3(x+500)$; jede Tochter erhält ferner $\frac{3}{2}(x+500)$, folglich ist der Antheil aller 5 Töchter $= \frac{15}{2}(x+500)$, und die hiernach formirte Gleichung:

$$x + 3(x+500) + \frac{15}{2}(x+500) = 12150,$$

woraus man $x = 600$ findet.

Es erhält also die Mutter $4050 + 600 = 4650$;
jeder Sohn $600 + 500 = 1100$; die 3 Söhne erhalten 3300;
jede Tochter $1100 . \frac{3}{2} = 1650$; die 5 Töchter 8250,
Summe 16200,
als Probe.

§. 80. Aufgabe 3. Ich habe, schreibt ein Studirender seinem Freunde, von meinem auf die Universität

mitgebrachten Gelde den 8ten Theil für Kost und Logie, und den 20ten Theil für Bücher und Wasch monatlich ausgegeben; nach 3 Monaten blieben mir noch 190 fl. und itzt nach einem Jahre bin ich noch 40 fl. über mein mitgebrachtes Geld schuldig. Du kannst dir nun einen Begriff von dem theuren Universitätsleben machen.

Formation der Gleichung.

Mitgebrachtes Geld	x
Monatliche Ausg.	$\frac{1}{8}x + \frac{1}{20}x$ oder $\frac{7}{40}x$
3monatliche Ausg.	3. $\frac{7}{40}x$ oder $\frac{21}{40}x$
Ueberschl. von 190 fl.	$\frac{21}{40}x + 190$
12monatliche Ausg.	12. $\frac{7}{40}x$ oder $\frac{84}{40}x$
Schulden	$\frac{84}{40}x - (x + 40)$ oder $\frac{44}{40}x - 40$.

Der doppelte Ausdruck derselben Summe Geldes ist also

$$\frac{21}{40}x + 190 = \frac{44}{40}x - 40.$$

Auflösung. Nach obigen Regeln entwickelt man hieraus die Gleichung: $230 = \frac{23}{40}x$, folglich $x = 400$, woraus jede monatliche Ausgabe gefunden wird *).

Zusatz. Man wird folgende ähnliche Ausgaben nun leicht lösen können:

1. Zur Errichtung eines öffentlichen Gebäudes kontribuirt jeder Bürger Anfangs 8 fl.; am Ende fehlen noch 1200 fl. Kontribuirt jeder nochmals die Hälfte seines vorigen Beytrages: so sind 200 fl. Ueberschuß. Wieviel sind es Bürger, und was kostet das Gebäude?

Aufl. Man formirt, wie vorhin, die Gleichung: $8x + 1200 = 12x - 200$, woraus $x = 350 =$ der Anz. der kontribuirenden Bürger und 4000 fl. $=$ der fraglichen Summe gefunden wird.

---

*) Man sieht leicht, daß man den Bedingungen der Aufgabe gemäß, deren letztere, als Folge, im Einklange stehen müssen mit den ersteren, auch habe setzen können: $\frac{21}{40}x + 190 = x$, oder $\frac{44}{40}x - 40 = x$.

2. A und B bringen gleiche Summen Geldes zum Spiele. A verliert 57 fl., B 12, behält daher 4mal mehr übrig, als A. Wieviel Geld hatte jeder vor dem Spiele?

Aufl. Das Geld des B nach dem Spiele ist x—12 = (x—57)4; also x = 72.

3. A sagt, er habe 234 fl. an 90 Stücken, theils Kronen (à 2, 7 fl.), theils Conventionsthal. (à 2, 4 fl.); wieviel Stücke jeder Sorte hat er?

Aufl. Man setze x Kronen, demnach 90—x Conventionsthaler: so hat man die Gleichung: 2, 7x + 2, 4(90—x) = 234; woraus x = 60 (Kr.), folglich 90—x = 30 (Conventionsthlr.) gefunden wird.

§. 81. Aufgabe 4. Wenn 2 Couriere A und B in einer Entfernung von 59 Meilen so einander entgegen reisen, daß A in 2 Stunden 7 Meilen, und B, der 1 St. später als A weggieng, in 3 St. 8 Meilen zurückgelegt: wie viel Meilen wird A machen müssen, bis er B erreicht?

Formirung der Gleichung. Beyde Couriere sind in dem Augenblicke beyeinander, wo die Zeiten gleich sind, die Jeder braucht, um seinen, in Meilen ausgedrückten, Weg vermöge der ihm beygelegten Geschwindigkeit zu durchlaufen. Nennt man daher die Länge des Weges für A x: so ist die für B 59 — x. Weil A 7 M. in 2 St. macht: so braucht er zur Zurücklegung der x Meilen, bis er B begegnet, (vermöge der einfachen goldn. Regel) $\frac{2x}{7}$ Stunden. Eben so verhalten sich 8 M.: 3 St. = 59 $-x : \frac{177-3x}{8}$ St. d. i. B legt seinen Weg von 59—x Meilen in $\frac{177-3x}{8}$ Stunden zurücke. Thut man nun den Unterschied der Zeiten, wo A und B ihren Weg antre-

ten, nämlich 1 St., zur kleineren Zeit hinzu: so entsteht die Gleichung

$$1 + \frac{177-3x}{8} = \frac{2x}{7}.$$

Aufl. Also $x = 35 =$ der Länge des Weges für A, bis er B begegnet.

Zusatz 1. Man kann diese Aufgabe allgemein so fassen: Es seyen die Geschwindigkeiten von 2 bewegten Körpern A und B, die Entfernung der Orte und der Unterschied der Zeiten, wo sie ausliefen, gegeben; den Punkt zu bestimmen, wo sie zusammentreffen.

Man setze, die Geschwindigkeit von A sey so groß, daß er in der Zeit f den Raum c, und die von B sey so, daß er in der Zeit g den Raum d durchlaufen könne; ferner die Entfernung der Orte sey e, und der Unterschied der Zeiten h.

Fall 1. Bewegen sich beyde Körper in derselben Richtung, und ist A weiter von dem Orte, wo A und B zusammenkommen, entfernt: so setze man für A die Länge des Weges vom Ausgangspunkte bis zu jenem Ort $= x$, folglich die Länge des von B zu durchlaufenden Raumes $= x - e$.

A durchläuft nun seinen Raum x in der Zeit $\frac{fx}{c}$, wie vorhin, und B den seinigen $x-e$ in der Zeit $\frac{gx-ge}{d}$. Damit nun die Zeiten gleich werden, addire man den Unterschied der Zeiten h zur kleineren Zeit, nämlich, wenn B früher ausgeht, zu $\frac{fx}{c}$: so hat man die allgemeine Gleichung

$$\frac{fx}{c} + h = \frac{gx-ge}{d},$$

woraus $x = \frac{cge + cdh}{cg - df}$ gefunden wird.

Geht aber A früher aus: so ist die Gleichung

$$\frac{fx}{c} = h + \frac{gx-ge}{d},$$

woraus $x = \frac{cge-cdh}{cg-df}$.

Fall 2. Bewegen sich A und B gegeneinander: so ist dann, wenn wieder x den Raum bezeichnet, den A bis zum Orte des Zusammentreffens durchlaufen muß, e—x der Raum oder die Entfernung für B, und $\frac{ge-gx}{d}$ die Zeit, innerhalb welcher B diesen Raum durchläuft. Geht nun B früher aus: so gilt die Gleichung $\frac{fx}{c} + h = \frac{ge-gx}{d}$, woraus $x = \frac{cge-cdh}{cg+df}$; aber $\frac{fx}{c} = h + \frac{ge-gx}{d}$ folglich $x = \frac{cge+cdh}{cg+df}$, wenn A früher ausgeht.

Beyspiel. Wenn sich die Sonne täglich 1 Grad, der Mond aber 13 Grad in derselben Richtung fortbewegt; wenn ferner die Sonne schon im Anfangspunkte des Krebses steht, der Mond aber erst nach 4 Tagen in den Anfangspunkt des Widders tritt: welches wird der Ort ihrer Conjunktion seyn?

Hier ist nach Fall 1. A der Mond, der gleichsam später ausgeht und weiter von dem Orte der Zusammenkunft absteht, und $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ der Raum, den er durchlaufen muß. Substituirt man nun $13 = c$; $1 = f = d = g$; $90 = e$, und $3 = h$: so erhält man $\frac{1209}{12} = 100\frac{3}{4} = 90 + 10\frac{3}{4}$ Gr. d. i. $10\frac{3}{4}$ Grad des Krebses ist der Ort der Conjunktion.

Als Beyspiel 2. zu Fall 2. dient die Aufgabe. Man substituire nämlich für die allgemeinen Größen der Formel $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ die dort bestimmten Zahlen: so findet man für A, der früher ausgieng, den Weg = 35 M.

Zusatz 2. Gehen A und B von demselben Orte aus: so verschwindet das Glied cge wegen e=0. Z. B. Ein Courier, der 3 M. in 1 St. macht und 5 St. früher weg ist, soll von einem andern, der 9 M. in 2 St. macht, zurückgeholt werden: wieviel Meilen muß dieser machen, bis er jenen einholt?

Hier ist A der zweyte Courier, 9=c; f=2; d=3; g=1; h=5 und die Formel $x = \frac{cdh}{cg-df} = 45$ M. durch Substit.

Zusatz 3. Aus diesen Formeln kann man ferner, wenn x als bekannt angenommen wird, jede andere Größe als unbekannt gedacht, entwickeln. So ist nach dem letzten Falle $c = \frac{dfx}{gx-dh}$, nämlich die Meilenzahl = c von A zu bestimmen, die er in 2 Stunden machen muß, um B einzuholen, ehe er über 45 M. zurückegelegt hat. U. s. w.

Zusatz 4. Fragt man statt nach der Länge des Weges nach der Zeit, wann z. B. B von A erreicht werde: so findet man die gehörigen Formeln, wenn man den gefundenen Werth für x z. B. in $\frac{fx}{c}$ Fall 1. substituirt. Nämlich $\frac{fx}{c} = \frac{f}{c} \times \frac{cge+cdh}{cg-df}$; also die Formel für die Zeit in diesem Falle ist $\frac{gef+dfh}{cg-df}$. Fragte man im Beysp. Zus. 2. wann wird B von A erreicht? so gilt

wegen $e=0$, die Formel $\frac{dfh}{cg-df} = \frac{3.2.5}{9.1-3.2} = \frac{30}{3} = 10$ St., welche Zeit, wenn die Anzahl der Meilen = 45 bekannt gewesen, durch die Proportion 9 : 45 = 2 : x gefunden worden wäre. U. s. w.

Zusatz 5. Die Formeln werden noch einfacher bey folgenden Aufgaben: Ein Bote B macht täglich 4 Meilen, und ist 3 Tage (oder 12 Meilen) voraus, wann wird der nachgeschickte Bote A, wenn er täglich 6 M. macht, jenen einholen?

Oder: Wann wird der Mond, der täglich 13 Grade geht, den Cometen, welcher in derselben Richtung täglich einen Bogen von 10 Gr. durchläuft, und 20 Gr. voraus ist, erreichen?

Oder: Wann wird der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 9 und 10 Uhr decken?

Hier wird in der Formel $x = \frac{dfh}{cg - df}$ f und $g = 1$, folglich $x = \frac{dh}{c-d}$.

Allein dergleichen einfache Aufgaben können auch durch blose Urtheilskraft nach der einfachen goldnen Regel, ohne zuerst eine Gleichung bilden zu müssen, leicht gelöst werden. Es muß nämlich B von A eingeholt seyn, wenn z. B. die Meilenanzahl von A, welche er vermöge des Ueberschusses seiner Geschwindigkeit über die von B zurückelegte, der Meilenanzahl, die dieser voraus hat, gleich geworden ist. Man darf daher nur mit der Zahl, welche den Unterschied der Geschwindigkeit ausdrückt, die Zahl, welche anzeigt, wieviel der andere voraus hat, dividiren. Der Quotient giebt die Antwort auf die Frage.

Will man ferner die obigen 3 Fragen unmittelbar (ohne Substitution in der angeführten Formel) be-

antworten: so wird man vorerst bemerken, daß 1) das „Wann“ im Sinne der 2 ersten Fragen bedeute: „in wieviel Tagen?“ — und im Sinne der 3. Frage: „in wieviel Stunden?“; daß 2) die bewegten Körper in dem Augenblicke beyeinander seyen, wo die von ihnen vermöge der ihnen zukommenden Geschwindigkeit zu durchlaufenden Räume einander gleich sind. Setzt man daher bey der ersten Frage, A bewege sich x Tage lang, durchlaufe also in dieser Zeit einen Raum von 6x Meilen: so ist der Raum, den B binnen derselben x Zeit durchläuft, = 4x Meilen, daher der ganze von ihm durchlaufene Raum = 4x + 12 oder = (x + 3) 4 Meilen. Man hat also die Gleichung 6x = 4x + 12 und hieraus x = 6 (Tage). — Auf dieselbe Weise formirt man in Beziehung auf die 2. Frage die Gleichung: 13x (Grade) = 10x + 20 oder = (x + 2). 10, woraus man $x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ (Tage) findet. — In Ansehung der 3. Frage ist die bekannte Geschwindigkeit des Minutenzeigers diese, daß er sich über 12 Raumstunden (des Zifferblattes) fortbewegt, während der Stundenzeiger eine dieser Raumstunden zurücklegt; jener durchläuft also in x Stunden (Zeit) 12x Raumstunden, und dieser in derselben Zeit 1. x Raumstunden, hat aber 9 Raumstunden voraus, folglich erhält man die Gleichung: 12x = x + 9, und hieraus $x = \frac{9}{11}$ (Zeitstunden) = 49′ +, d. i. beyde Zeiger decken sich sehr nahe da, wo auf dem Zifferblatte die 49. Minute angegeben ist.

B.

Grundregeln zur Auflösung zusammengesetzter Gleichungen vom reinen und zweyten gemischten Grade.

§. 82. Erste Regel. Jede zusammengesetzte reine Gleichung löst man dadurch auf, daß

man, wenn sie auf die einfachste Form nach obigen Regeln gebracht ist, so, daß sie als eine zweygliedrige (équation à deux termes) erscheint, auf der andern Seite die sovielste Wurzel auszieht, als der Exponent der unbekannten Größe anzeigt.

Denn gleiche Größen haben gleiche Wurzeln desselben Grades.

Z. B. $\frac{bx^3}{a} - c = f$. Die einfachste Form dieser Gleichung ist $x^3 = \frac{af + ac}{b}$, woraus $x = \sqrt[3]{\left(\frac{af + ac}{b}\right)}$.

Zusatz 1. Dieses Verfahren zeigt zugleich, wie man die unbekannte Größe von dem Wurzelzeichen befreyen könne, indem nämlich gleiche Wurzeln gleiche Potenzen desselben Grades geben. Hat man z. B. $\sqrt[m]{x} = a$, so ist auch $(\sqrt[m]{x})^m = a)^m$, d. i. $x = a^m$. Man muß nach demselben Grundsatze verfahren, wenn man die Irrationalität eines Gliedes der Gleichung will verschwinden machen. Es sey z. B.

$5x + \sqrt{(25x^2 + 3x + 50)} = 71$, oder

$\sqrt{(25x^2 + 3x + 50)} = 71 - 5x$; so ist

$25x^2 + 3x + 50 = (71 - 5x)^2 = 5041 - 710x + 25x^2$, oder

$713x = 5041 - 50 = 4991$, daher denn

$x = \frac{4991}{713} = 7$.

Zuweilen verschwindet die Irrationalität der Glieder durch die vorzunehmenden Operationen von selbst. Wenn man z. B. die Gleichung hat

$\frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{b\sqrt{x}}{c} = (m - n)\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{x}}$, und man hebt die Brüche auf: so hat man sogleich

$ac - bx = c(m-n)\,x + c^2$, woraus man nun

$$x = \frac{c(c-a)}{c(n-m)-b}$$ findet.

Zusatz 2. Wie löst man die Gleichung $\frac{ax^{\frac{n}{-m}}}{b} - d = p$?

Zusatz 3. Die einfachste Form jeder reinen quadratischen Gleichung ist $x^2 = \pm a$, folglich $x = \pm\sqrt{\pm a}$ (§. 57. Zus. 1.).

Beyspiel. Eine Zahl zu finden, wozu eine bekannte Zahl a addirt und subtrahirt, nun diese Summe, durch die Differenz multiplizirt, ein Produkt f giebt.

Aufl. $(x+a)(x-a) = f$; also $x = \pm\sqrt{(f+a^2)}$. Setzt man $a = 5$ und $f = 96$; so ist $x = \pm 11$.

Zusatz 4. So hat überhaupt jede quadratische Gleichung eine doppelte Wurzel, durch deren Substitution für x in der Gleichung alle Glieder der Gleichung verschwinden. So ist, die vorige Gleichung auf 0 gebracht, $x^2 - a^2 - f = 0$, für x substituirt $+11$ u. s. w. hat man $121 - 25 - 96 = 0$; dasselbe findet man, wenn man -11 für x substituirt; d. i. sowohl $+11$ als -11 sind wahre Wurzeln der Gleichung.

Zusatz 5. Wenn man sich daher die Gleichung $x^2 - 121 = 0$ aus dieser $(x+11)(x-11) = 0$ entsprungen denkt: so erkennt man sogleich ihre 2 Wurzeln, indem, wenn man $x = -11$, oder $x = +11$ setzt, jedesmal einer der Faktoren $= 0$, folglich die ganze Gleichung zu Null wird.

Es erhellt ferner, daß, wenn man eine Wurzel der Gleichung, z. B. $x = +11$, kennt, die andere Wurzel der Gleichung gefunden werde, indem man die vorgegebene Gleichung $x^2 - 121 = 0$ durch den nun gebildeten Faktor $x - 11$ dividirt; denn der Quotient aus der er-

sten Seite der Gleichung ist nothwendig der andere Faktor $x+11$. Weil nun der Quotient aus der andern Seite der Gleichung, nämlich $\frac{0}{x-11}$, gleich Null ist, man daher die neue Gleichung $x+11=0$ erhält: so erkennt man hieraus die zweyte gesuchte Wurzel $x=-11$.

§. 83. Zweyte Regel. Hat man irgend eine gemischte quadratische Gleichung auf die einfachste Form, wie $x^2 \pm mx = \mp g$, gebracht: so halbire man die Coefizienten von der unbekannten Größe mit dem niedrigsten Exponenten, hier $\pm m$; den Quotienten $\pm\frac{m}{2}$ erhebe man zum Quadrat und setze dieses $+\frac{m^2}{4}$ auf beyden Seiten der Gleichung hinzu, um wieder eine wahre Gleichung zu haben. Nun stellt die erste Seite der Gleichung $x^2 \pm mx + \frac{m^2}{4}$ ein vollständiges Quadrat vor. Zieht man daher auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus: so findet man $x \pm \frac{1}{2}m = \pm\sqrt{(\mp g + \frac{1}{4}m^2)}$, oder $x = \mp\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\pm g + \frac{1}{4}m^2)}$.

Beweis. Daß durch das angeführte Verfahren die erste Seite der Gleichung ein vollständiges Quadrat aus einer zweytheiligen Wurzel vorstellt, erhellt aus dem Vergleiche der Seite $x^2 \pm mx$ mit dem Quadrate $a^2+2ab+b^2$ der zweytheiligen Wurzel $a+b$. Setzt man nämlich $x^2=a^2$, folglich $x=a$, und $\pm mx$ gleich $+2ab$, folglich $+2b = \pm m$: so sieht man deutlich, daß zu den nothwendigen Bestandtheilen eines Quadrates aus einer 2theiligen Wurzel noch der 3te Bestandtheil oder b^2 fehlt. Nun ist $+2b = \pm m$ gesetzt, folglich ist $+\frac{2b}{2} = \pm\frac{m}{2} = b$; daher $\left(\pm\frac{m}{2}\right)^2 = b^2$ der wahre noch fehlende Bestandtheil zum vollständigen Quadrate.

Zusatz 1. Setzt man in der vorigen Gleichung $+m=8$ und $+g=65$: so ist x entweder $=+5$ oder $=-13$. Nimmt man $-m$ und $+g$ mit denselben Werthen: so ist x entweder $=13$ oder $=-5$. Setzte man $g>\frac{1}{4}m^2$: so erhielte man für x 2 unmögliche Größen. Also hat auch diese Gleichung eine doppelte gleich reelle, oder imaginäre Wurzel.

Zusatz 2. Jede gemischte quadratische Gleichung läßt sich auf eine gleiche Form, wie die vorige, bringen. Es sey z. B. $ax^2+bx^2-cx+dx=h^2-r$. Man hat durch bloße Reduktion $x^2(a+b)+(d-c)x=h^2-r$, daher $x^2+\frac{d-c}{a+b}x=\frac{h^2-r}{a+b}$; setzt man nun $\frac{d-c}{a+b}=m$ und $\frac{h^2-r}{a+b}=g$: so ist die Gleichung $x^2+mx=g$.

Zusatz 3. Hat man eine Gleichung, wie $x^4=9x^2+5$: so verfährt man entweder ganz nach der Regel §. 83, oder man bildet sie dadurch zu einer eigentlichen gemischten quadratischen Gleichung um, daß man $x^2=y$ setzt, und dann aus dem gefundenen Werthe für y die Wurzel $=x$ sucht.

Die einfachste Form jener Gleichung ist $x^4-9x^2=5$. Wenn man nun x^2 selbst als ersten Wurzeltheil $(=a)$ betrachtet: so ist x^4 dessen Quadrat, und $\frac{-9}{2}$, wie vorhin, der 2. Wurzeltheil $(=b)$; man hat folglich durch Ergänzung des Quadrats die neue Gleichung $x^4-9x^2+\frac{81}{4}=5+\frac{81}{4}$, und hieraus $x^2=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{101}{4}}=\frac{9}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{101}$ (§. 54. Zus. 3.) $=\frac{9\pm\sqrt{101}}{2}$; daher $x=\pm\sqrt{\frac{9\pm\sqrt{101}}{2}}$.

Setzt man aber in der vorgegebenen Gleichung $x^2 = y$, so, daß sie in diese: $y^2 - 9y = 5$ übergeht: so findet man vorerst nach der Regel (§. 83.) $y = \frac{9 \pm \sqrt{101}}{2}$ $= x^2$, und hieraus x wie vorhin.

Zusatz 4. Das im vorigen Ausdrucke für x zweymal gesetzte Zeichen $\pm$ zeigt, daß jene biquadratische Gleichung 4 Wurzeln haben werde. Wenn man sich ferner eine kubische Gleichung, z. B. $x^3 = \pm 1$, oder $x^3 \mp 1 = 0$, auf eine gleiche Weise, wie oben (§. 82. Zus. 4.) die quadratische, entsprungen oder durch $(x + r)(x + r')(x + r'') = 0$ allgemein dargestellt denkt: so wird man schließen, daß auch jede kubische Gleichung 3 Wurzeln haben müsse, nämlich $x = -r$; $x = -r'$; $x = -r''$; daß man ferner, wenn eine Wurzel, z. B. $x = -r$, bekannt ist, die 2 andern finden werde, wenn man, wie oben, die vorgegebene Gleichung durch $x + r\ (= 0)$ dividirt.

So ist nach §. 82. Zus. 1. ± 1 eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung $x^3 \mp 1 = 0$. Diese also durch $x \mp 1$ dividirt, findet man den Quotienten $x^2 \pm x + 1$, oder die neue Gleichung $x^2 \pm x + 1 = 0$, aus welcher man nach unserer Regel (§. 83.) $x = \mp \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - 1)}$ $= \mp \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$ entwickelt, so, daß also (durch eine ähnliche Veränderung des letzten Ausdruckes, wie vorhin im Zus. 3.) $x = \frac{\mp 1 + \sqrt{-3}}{2}$, oder $x = \frac{\mp 1 - \sqrt{-3}}{2}$ ist. Diese 2 imaginären Wurzeln bilden demnach mit jener möglichen ± 1 die 3 Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 = \pm 1$, oder die 3 für x gesetzten Ausdrücke sind die 3 kubischen Wurzeln von ± 1. — Auf ganz gleiche Weise findet man, daß die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 = \pm 8$ diese 3 seyen: $x = \pm 2$; $x = \mp 1 + \sqrt{-3}$; $x = \mp 1 - \sqrt{-3}$. Wenn man unter Berück-

sichtigung des in den §§. 58. 59. Gesagten die sowohl vorhin, als jetzt für x gesetzten imaginären Werthe kubirt: so wird man sich schon hiedurch überzeugen, daß dieselben, wie ± 1, oder ± 2, wahre kubische Wurzeln von ± 1, oder von ± 8 seyen. Und allgemein, wenn ist $x^3 = a^3$, findet man $x = a$, mit den imaginären Werthen $x = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$.

Zusatz 5. Man habe die Aufgabe, die Zahl 6 in 2 Faktoren zu zerlegen, deren Würfelsumme $= 35$ sey. Setzt man den einen Faktor $= x$, so ist der andere $= \frac{6}{x}$, und $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; folglich $x^6 - 35x^3 = -216$. Betrachtet man wieder x^3 als ersten Wurzeltheil, dessen Quadrat x^6 vorhanden ist; so ist $\frac{-35}{2}$ der 2te Wurzeltheil, demnach findet man, wie oben, $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1225}{4} - 216\right)} = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}$ folglich $x^3 = \frac{35}{2} + \frac{19}{2} = \frac{54}{2} = 27$, oder $x^3 = \frac{35}{2} - \frac{19}{2} = 8$, daher denn x entweder $= \sqrt[3]{27} = 3$, oder $x = \sqrt[3]{8} = 2$. Allein da die vorgegebene Gleichung eine vom 6ten Grade ist: so wird man vermöge der Induktion schließen, daß sie 6 Wurzeln haben müsse. Auch erhellt aus Zus. 4., daß man von 27 sowohl, als von 8, drey kubische Wurzeln haben müsse. Man findet diese leicht durch Substitution der oben aufgefundenen Wurzeln von 1. Es ist nämlich

I. $x = 1 . 3$; II. $x = 1 . 2$

III. $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} . 3$ IV. $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} . 2$

V. $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . 3$ VI. $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . 2.$

Zusatz 6. Indessen vernachläßigt man in der niedern Analysis, unter der Voraussetzung, daß die vorgelegte Frage nur durch die Angabe möglicher Größen beantwortet werden solle, das Aufsuchen dieser imaginären Werthe der unbekannten Größen. Mit Recht verwirft daher der Analyst nur dann eine vorgelegte Frage als unmöglich oder sinnlos, wenn die Auflösung der ihren Bedingungen gemäß gebildeten Gleichung nur unmögliche Werthe der gesuchten Größe giebt.

Beyspiel. Man soll die Zahl 2 in zwey Theilen, als Summanden, ausdrücken, deren Produkt die Zahl 4 giebt. Dieses führt, wenn x der eine, folglich $2-x$ der andere Theil ist, auf die Gleichung $x(2-x) = 4$, oder geordnet, $x^2 - 2x = -4$, woraus man findet $x = 1 \pm \sqrt{-3}$ = einer unmöglichen Größe, man mag + oder − gelten lassen. Die Frage selbst ist daher unmöglich. In der That kann das größte Produkt zweyer Theile einer Zahl oder Linie a nicht größer als $\frac{1}{4}a^2$, d. i. als das Quadrat der Hälfte des Ganzen seyn.

Denn es sey allgemein $\frac{a}{n}$ der eine, und daher $a - \frac{a}{n}$ oder $\frac{an-a}{n}$ der andere Theil: so ist ihr Produkt $= \frac{a}{n} . \frac{an-a}{n} = \frac{n-1}{n^2} . a^2$. Dieses Produkt ist offenbar das größte, wenn $n = 2$, es selbst daher $= \frac{1}{4}a^2$ ist, indem für jedes größere n, der Nenner n^2 jenes Bruches mehr wächst im Verhältnisse zu $n-1$, als $n^2 = 4$ im Ver-

hältnisse zum Zähler 1. Dieses erhellt auch schon daraus, weil, 1^2 ausgenommen, die Zahl 4 als Quadrat von 2 sich unter allen Quadratzahlen seiner Wurzel 2 am meisten nähert. Für jedes größere n wird demnach der Bruch $\frac{n-1}{n^2}$ kleiner, als $\frac{1}{4}$, folglich ist $\frac{1}{4}a^2$ das größte Produkt.

Demnach war die Frage nach 2 solchen Theilen von $a=2$, deren Produkt $=4$, d. i. $>\frac{1}{4}2^2$ oder >1 seyn sollte, unmöglich, was denn obiger Calcul zugleich zeigte.

Zusatz 7. Noch bleibt zu erörtern übrig, welche Bedeutung dem auf analytischem Wege gefundenen Werthe $x=\frac{0}{0}$ zukomme.

Beyspiel. Man soll von einer Zahl a zwey solche Theile x und $a-x$ finden, daß die Summe ihrer Quadrate sich allgemein verhalte, wie $1:b$, d. i. daß sey $(a-x)^2:x^2:=1:b$.

Nach §. 142. der Ziffernr. hat man statt dieser Proportion die Gleichung: $b(a-x)^2=x^2$ oder $b(a^2-2ax+x^2)=x^2$, und hieraus $x^2-\frac{2abx}{b-1}=-\frac{a^2b}{b-1}$, folglich findet man $x=\frac{ab}{b-1}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{(b-1)^2}-\frac{a^2b}{b-1}\right)}=$

$\frac{ab}{b-1}\pm\sqrt{\frac{a^2b^2-a^2b(b-1)}{(b-1)^2}}=\frac{ab}{b-1}\pm\frac{a}{b-1}\sqrt{b}$ (durch Reduktion und nach §. 54. Zus. 3.) $=\frac{ab\pm a\sqrt{b}}{b-1}$. Also ist I. $x=\frac{a(b+\sqrt{b})}{b-1}$ und II. $x=\frac{a(b-\sqrt{b})}{b-1}$, folglich vermöge I. ist $a-x=a-\frac{a(b+\sqrt{b})}{b-1}=\frac{ab-a-ab-a\sqrt{b}}{b-1}$

$=\frac{-a(\sqrt{b}+1)}{b-1}$, und vermöge II. ist $a-x=\frac{-a(1-\sqrt{b})}{b-1}$.

Es ist ferner aus I. $x + (a - x) = \frac{a(b + \sqrt{b}) - a(\sqrt{b} + 1)}{b - 1}$

$= \frac{ab - a}{b - 1} = \frac{(b - 1)a}{b - 1} = a$, wie es der Aufgabe gemäß seyn muß. Dasselbe Resultat findet man aus II.

Setzt man nun $b = 1$, so hat man aus I. $x = \frac{2a}{0}$ $= \infty$, und aus II. $x = \frac{0}{0}$. Man hat nämlich in diesem Falle die Proportion: $(a - x)^2 : x^2 = 1 : 1$; da nun $1 : 1$ ein Verhältniß der Gleichheit ist: so muß auch $(a - x)^2 = x^2$, folglich a gegen x verschwindend, oder x unendlich groß seyn, wie dieses auch der Werth aus I. angiebt. Allein, da auch $1 : 1 = c^2 : c^2$ oder $= d^2 : d^2$, daher auch $(a - x)^2 : x^2 = c^2 : c^2$ oder $= d^2 : d^2$ ... ist: so folgt, daß x auch unbestimmt seyn müsse, was denn der Werth $x = \frac{0}{0}$ ausdrückt.

Weil ferner für denselben Fall, wo $b = 1$, folglich auch $(a - x)^2 = x^2$ ist, auch die Wurzeln r, r aus beyden Zahlen gleich, folglich auch vermöge der Aufgabe beyde Wurzeln, addirt, gleich a seyn müssen: so muß auch ein Werth von $x = r = \frac{1}{2}a$ seyn. Auch diesen Werth giebt unsere allgemeine Auflösung. Denn man setze in II. statt $b - 1$ die gleiche Größe $(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} - 1)$, und $\sqrt{b}\sqrt{b}$ statt b: so hat man $x = \frac{a(\sqrt{b}\sqrt{b} - \sqrt{b})}{(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} - 1)}$

$= \frac{a[\sqrt{b}(\sqrt{b} - 1)]}{(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} - 1)} = \frac{a\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}} = \frac{1}{2}a$ für $b = 1$. Denselben allgemeinen Werth von x findet man sogleich, wenn man die ursprüngliche Proportion durch die Gleichung $\frac{x^2}{(a - x)^2} = b$ ausdrückt, indem man hieraus $\frac{x}{a - x}$ $= \pm\sqrt{b}$, und wenn man $+$ gelten läßt, weiter $x = \frac{a\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}}$ entwickelt.

Anmerkung. Die aufgestellte und bisher angewendete Methode, eine gemischte quadratische Gleichung, die man auf die einfachste Form gebracht hat, durch Complirung des Quadrates der Auflösung nahe zu bringen, ist die gewöhnliche, und, wie wir gesehen haben, auch leicht und schnell zum Ziele führende Methode. Inzwischen kann man auch die gemischte und quadratische Gleichung dadurch in eine reine quadratische verwandeln, daß man das zweyte Glied $\pm mx$ (§. 83.) wegschafft, indem man $x = y \mp \frac{1}{2}m$ setzt. Dann wird $x^2 = y^2 \mp my + \frac{1}{4}m^2$, und die Gleichung $x^2 \pm mx = \pm g$ geht in diese über:

$y^2 \mp my + \frac{1}{4}m^2 \pm my - \frac{1}{2}m^2 = \pm g$, woraus durch Reduktion $y^2 - \frac{1}{4}m^2 = \pm g$, daher $y^2 = \frac{1}{4}m^2 \pm g = \frac{m^2 \pm 4g}{4}$ und $y = \pm\sqrt{\frac{m^2 \pm 4g}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(m^2 \pm 4g)}$.

Man hat also $x(= y \mp \frac{1}{2}m) = \mp\frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 \pm 4g)} = \frac{\mp m \pm \sqrt{(m^2 \pm 4g)}}{2}$, wie man denn auch die Endgleichung im §. 83. hätte ausdrücken können.

Auch erhellt leicht, daß dieses Verfahren keine wesentliche Aenderung leide, wenn man z. B. $x^4 + ax^2 = b$ hat, und setzt $x^2 = y - \frac{1}{2}a$.

Anwendung der zweyten Regel.

§. 84. Aufgabe 1. Es sey die Summe von 175 fl. unter einer gewissen Anzahl von Menschen zu vertheilen. Durch den inzwischen erfolgten Tod von zweyen soll der Antheil eines jeden der übrigen um 10 fl. vermehrt worden seyn: man will die Anzahl der noch lebenden Theilnehmer wissen.

Anleitung zur Bildung der Gleichung. Wüßten wir die Anzahl aller Theilnehmer: so würden wir die Summe 175 durch diese Zahl dividiren, wodurch wir den Antheil eines jeden erfahren würden. Dann dividirten wir die Summe durch eben jene, aber um 2 verminderte, vorausgesetzte Zahl, um zu wissen, wieviel

jeder der noch lebenden Theilnehmer empfienge. Würden wir endlich von dem letzten Quotienten 10 fl. wegnehmen: so müßte der Rest gleich seyn jenem Quotienten.

Indem wir nun jene vorausgesetzte Zahl x nennen, und gerade so verfahren, als wenn sie bekannt wäre: so erhalten wir die Gleichung $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Aufl. Daraus ist nach den Regeln unter I. $x^2 - 2x = 35$, und nach der Regel §. 83. $x = 1 \pm \sqrt{36} = 7$ oder $= -5$.

Daß aber hier der erste Werth für x, oder 7, der wahre sey, welcher der Aufgabe gemäß gefunden werden sollte, sieht man daraus, weil $\frac{175}{7} = 25$ und $\frac{175}{7-2} = 35$, folglich letzterer Quotient den erstern wirklich, wie die Aufgabe will, übersteigt. Der letztere Werth -5 würde für die Aufgabe passen, nach welcher 175 fl. unter einer noch um 2 vermehrten Anzahl von Theilnehmern vertheilt, und wodurch der Antheil eines jeden um 10 fl. vermindert werden sollte.

Aufgabe 2. Es verkauft Jemand ein Pferd um 24 Karolin, und verliert dadurch soviel von Hundert, als ihm das Pferd gekostet hatte; welches war der erste Kaufpreis des Pferdes?

Anl. zur Bild. d. Gl. Wir schließen so: wenn man für 100 erhält 100 weniger den angeblichen ersten Kaufpreis, wieviel wird man für den ganzen angeblichen Kaufpreis erhalten? Die auf diese Frage gefundene Zahl müßte dann gleich seyn jenem gegebenen Verkaufpreis oder der Zahl 24.

Nennen wir daher x den angegebenen oder vorausgesetzten Kaufpreis: so ist $100 : 100 - x = x : \frac{100x - x^2}{100}$,

d. i. $\frac{100x - x^2}{100} = 24$.

Aufl. Daraus findet man $x = 50 \pm \sqrt{100} = 50 \pm 10$, daher x entweder $= 60$ oder $= 40$. Da jeder dieser Werthe der Aufgabe genüge thut: so ist diese zum Theil unbestimmt.

Aufgabe 3. Eine solche Zahl zu finden, deren Quadrat mit der Summe ihres 9fachen und der Zahl 50 die Zahl 30 giebt.

Aufl. Aus der hier zu bildenden Gleichung findet man $x = -\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}$, folglich $x = -4$ oder $= -5$; diese 2 negativen Werthe für x zeigen, daß die Aufgabe fehlerhaft oder unzuläßig sey. Man wird dieses Fehlerhafte nach §. 77. Anmerk. dadurch heben, daß man die Frage z. B. so stellt: eine Zahl zu finden, deren Quadrat mit der Zahl 50 weniger dem 9fachen der gesuchten Zahl gleich ist dem Unterschiede 30.

Aufgabe 4. Ein Kaufmann, welcher für 1800 Dukaten mehrere Stücke Tuch gekauft hat, stirbt plötzlich. Der Commissionär sendet 100 Stücke den Erben. Diese erinnern sich, daß der Verstorbene gesagt hatte: Hätte er den Handel einen Tag früher gemacht, so würde er für denselben Preis 30 Stücke mehr habe kaufen können, und das Stück wäre ihm um 3 Dukaten wohlfeiler gekommen. Wieviel Stücke Tuch hätten die Erben bekommen müssen?

Bildung der Gleichung. Die wahre Anzahl der gekauften Stücke sey x: so ist der Werth jedes einzelnen $\frac{1800}{x}$. Hätte man 30 St. mehr für 1800 Duk. bekommen: so wäre $\frac{1800}{x+30}$ der Preis eines dieser Stücke; da nun dieses um 3 Duk. wohlfeiler seyn soll, als das Stück vom ersten Preise: so hat man die Gleichung

$$\frac{1800}{x+30} + 3 = \frac{1800}{x}.$$

Aufl. $x = \pm \sqrt{(18000 + 225)} - 15 = + 120$, weil hier nur der positive Werth gelten kann. Also wären 20 Stücke unterschlagen worden.

Aufgabe 5. Ein Vater hinterläßt eine gewisse Anzahl (= x) Kinder, die sein Vermögen so theilen, daß das erste Kind erhält 100 Thlr. und den 10. Theil des übrigen Vermögens; das zweyte 200 Thlr. $+ \frac{1}{10}$ des Restes; das dritte 300 Thlr. $+ \frac{1}{10}$ des Restes, u. s. w. auf gleiche Weise, wodurch das Vermögen (= z) 1) aufgetheilt wird, 2) jedes Kind gleichviel bekömmt. Wieviel sind es Kinder und wie groß ist das Vermögen?

Formation der Gleichung. a. Das letzte Kind bekömmt soviel 100 Thlr., als Kinder sind, also 100x Thlr. und hiezu $\frac{0}{10}$, weil nichts mehr übrig, oder das Vermögen aufgetheilt seyn soll. b. Das erste Kind erhält daher eben soviel, aber auch $100 + \frac{z - 100}{10}$ Thlr. Also hat man einen doppelten Ausdruck des Antheiles des ersten Kindes, oder die Gleichung $100x = 100 + \frac{z - 100}{10}$, worin nur noch z zu bestimmen ist, was c. so geschieht: die x Kinder erhalten das ganze Vermögen z; ein jedes Kind aber oder eines der Kinder empfängt nach a. 100x Thlr., wieviel empfangen also die x Kinder? Man wird daher aus der Proportion $1 : x = 100x : z$ den Werth für $z = 100x^2$, und durch dessen Substitution in obigem Ausdrucke die Gleichung haben: $100x = 100 + \frac{100x^2 - 100}{10}$.

Auflösung. Diese Gleichung auf die einfachste Form gebracht, hat man die Gleichung vom 2. gemischten Grade $x^2 - 10x = -9$, woraus man $x = 5 \pm 4$ findet, d. i. die Anzahl der Kinder ist entweder $= 9$, und

das Vermögen $= 100x^2 = 8100$ Thlr; oder jene Anzahl $= 1$, und das Vermögen $= 100$ Thlr.

Zusatz. Eine Aufgabe derselben Art ist: das erste Kind soll $\frac{1}{13}$ des Vermögens $+ 1$ fl.; das zweyte $\frac{1}{13}$ des vorigen Restes $+ 2$ fl. u. s. w.; jedes folgende Kind $\frac{1}{13}$ des gebliebenen Restes $+$ einen Gulden mehr, als das vorhergehende Kind bekommen. Uebrigens sollen die Antheile wieder gleich, und das Vermögen soll aufgetheilt seyn.

Wenn man den Rest für das $(x-1)$te oder vorletzte Kind mit r, und den Rest für das xte oder letzte Kind mit r′ bezeichnet: so ist der Antheil jenes Kindes $\frac{r}{13} + (x-1) = \frac{r'}{13} + x$, als dem Antheile des letzten Kindes, folglich $\frac{r}{13} - \frac{r'}{13} = 1$, d. i. der vorletzte Rest übertrifft den letzten um 1 oder $\frac{13}{13}$, so, daß folglich das Vermögen aufgetheilt ist, wenn das letzte Kind diese $\frac{1}{13} + x$ fl. erhält. Demnach ist auch der Antheil eines jeden Kindes $= 1 + x$, und es ergiebt sich, wie vorhin, mittels der Proportion: $1 : x = 1 + x : z$ das ganze Vermögen $z = x^2 + x$; daher denn der Antheil des ersten Kindes sowohl $= \frac{x^2 + x}{13} + 1$, als $= 1 + x$, und demnach die gesuchte Gleichung $\frac{x^2 + x}{13} + 1 = 1 + x$ hervorgeht.

Die Auflösung nach §. 76. Zus. giebt $x = 12$, und daher $z = 144 + 12 = 156$.

Aufgabe 6. Die Zahl 48 in 2 solche Faktoren zu zerlegen, daß die Summe ihrer Quadrate $= 100$ sey.

Bildung der Gleichung. Wenn $xy = 48$ und

x der eine Faktor ist: so ist $\frac{48}{x}$ (= y) der andere Faktor, daher die Gleichung $x^2 + \frac{48}{x})^2 = 100$, oder $x^2 + \frac{2304}{x^2} = 100$.

Auflösung. Durch Aufhebung des Bruches und Versetzung, hat man $x^4 - 100x^2 = -2304$, und hieraus nach §. 83. Zus. 3. $x^2 = 50 \pm \sqrt{(2500 - 2304)} = 50 \pm \sqrt{196} = 50 \pm 14$, daher $x = \pm\sqrt{(50 \pm 14)}$. Man erhält also folgende 4 Werthe für x, oder Wurzeln der Gleichung, nämlich:

$$x = +\sqrt{(50+14)} = +\sqrt{64} = +8;$$
$$x = +\sqrt{(50-14)} = +\sqrt{36} = +6;$$
$$x = -\sqrt{(50+14)} = -\sqrt{64} = -8;$$
$$x = -\sqrt{(50-14)} = -\sqrt{36} = -6;$$

Zusatz. Um zu zeigen, wie man das Zweifelhafte der Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung entscheiden könne, sey noch die Gleichung

$$\sqrt{(12+x)} - \sqrt[4]{(12+x)} = 2$$

aufzulösen. Setzt man $12 + x = z$: so hat man die Gleichung $z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{4}} = 2$. Behandelt man diese Gleichung, wie eine vom eigentlichen zweyten gemischten Grade (§. 74.) unmittelbar: so findet man $z^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1 \pm 3}{2}$, daher

$$z = \left(\frac{1 \pm 3}{2}\right)^4 = x + 12, \text{ folglich } x = \left(\frac{1 \pm 3}{2}\right)^4 - 12;$$

daher x entweder $= 16 - 12 = 4$, oder $x = 1 - 12 = -11$.

Will man nun nach §. 72. prüfen, ob diese Werthe der Gleichung Genüge thun: so substituire man zuerst 4 statt x in der vorgegebenen Gleichung; man findet $\sqrt{16} - \sqrt[4]{16} = 2$, wie es seyn muß. Substituirt man -11

statt x: so hat man $\sqrt{1}-\sqrt[4]{1}=2$, und man sieht, daß, wenn man $\sqrt{1}=+1$ nimmt, $\sqrt[4]{1}=-1$ genommen werden müßte, um $+1-(-1)=2$ zu erhalten. Allein da sowohl $\sqrt{1}$ auch $=-1$, als $\sqrt[4]{1}$ auch $=+1$ seyn kann: so scheint der Werth $x=-11$ zweifelhaft zu seyn. Dieser Zweifel verschwindet, wenn man auf die ursprüngliche Auflösung zurückegeht und statt der vorgegebenen Gleichung setzt $\sqrt{z}-\sqrt[4]{z}=2$. Nun ist, wenn $-$ gilt, $z=\left(\frac{1-3}{2}\right)^4=(-1)^4$, daher $\sqrt{z}=(-1)^{\frac{4}{2}}=(-1)^2=+1$, und $\sqrt[4]{z}=(-1)^{\frac{4}{4}}=-1$. Daher denn nothwendig obiges $\sqrt{1}-\sqrt[4]{1}=+1-(-1)=2$.

C.

Methoden der Auflösung einfacher oder quadratischer Gleichungen mit 2 unbekannten Größen *).

§. 85. **Erste Methode. Die aus beyden Gleichungen für dieselbe unbekannte Größe gefundenen Werthe werden einander gleichgestellt.**

Beyspiel. Es seyen die Gleichungen

A) $ax+by=s$; also $x=\frac{s-by}{a}$

B) $mx-ny=d$; also $x=\frac{d+ny}{m}$

folglich $\frac{s-by}{a}=\frac{d+ny}{m}$, woraus $y=\frac{ms-ad}{an+bm}$, und, diesen Werth in einem jener für x gefundenen Werthe substituirt, $x=\frac{ns+bd}{an+bm}$.

*) S. §. 74. Anm.

§. 86. **Zweyte Methode.** Man substituiret den für eine unbekannte Größe aus irgend einer Gleichung entwickelten Werth an der Stelle derselben Größe in der andern Gleichung.

Beyspiel. Es sollen dieselben Gleichungen, wie vorhin, bleiben. Man suche z. B. aus A) z. B. y, und bringe diesen Werth $\frac{s-ax}{b}$ in B) für y: so hat man

$mx-\frac{ns-anx}{b}=d$, folglich $x(an+bm)=ns+bd$,

oder $x=\frac{ns+bd}{an+bm}$. Durch Substitution dieses Werthes in der gefundenen Gleichung $y=\frac{s-ax}{b}$, bekömmt man denselben Ausdruck, wie §. 85.

§. 87. **Dritte Methode.** Man addirt die Gleichungen, oder subtrahirt eine von der andern, nachdem man die Glieder, in welchen die zu eliminirende unbekannte Größe vorkömmt, zu einerley Größen gemacht hat.

Beyspiel. Es sollen wieder dieselben Gleichungen bleiben, und man will x elimininen. Man mache nun aus

A) $amx+bmy=ms$

aus B) $amx-any=ad$, durch Subtr. wird

$-\quad+\quad-$

C) $bmy+any=ms-ad$,

daher $y=\frac{ms-ad}{an+bm}$, wie oben.

Wollte man y elimininen: so multiplizirte man die gegebene Gleichung A) mit n und B) mit b und addirte die so veränderten Gleichungen.

Das Gesetzmäßige dieser 3 Methoden der Elimination erhellt von selbst.

Zusatz. Eine ähnliche allgemeine Methode, eine unbekannte Größe aus Gleichungen vom ersten Grade zu eliminiren, besteht darin, daß man eine der Gleichungen mit einer vor der Hand als bekannt angenommenen Größe multiplizirt, dann die Gleichungen addirt, und die Coeffizienten einer der gesuchten Größen $= 0$ setzt, wodurch diese Größe verschwindet, und sich zugleich der Werth der angenommenen Größe bestimmt.

Beyspiel. Es seyen die Gleichungen

D) $ax + by + c = 0$

E) $a'x + b'y + c' = 0.$

Man multiplizire z. B. D) mit m und addire E): so hat man F) $x(am + a') + y(bm + b') + cm + c' = 0.$ Setzt man hier $am + a' = 0$: so verschwindet x, und m wird $= \frac{-a'}{a}$, y aber findet man $= \frac{-cm - c'}{bm + b'}$; oder durch Substitut. für m ist $y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$.

Da nun aus D) $x = \frac{-by - c}{a}$: so ist, der Werth von y hier substituirt, $x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$.

Anmerkung 1. Was für eine dieser Methoden am vortheilhaftesten anzuwenden sey, entscheidet die Urtheilskraft leicht bey bestimmten Fällen.

Anmerkung 2. Newton hat in seiner Arimeth. univ. pag. 74. vier Normgleichungen oder Regeln zur Elimination einer unbekannten Größe aus 2 gegebenen Gleichungen aufgestellt, ohne sie zu deduziren oder zu beweisen. Nachzuweisen, wie dieses mit Hilfe der oben angeführten Eliminationsmethoden leicht geschehen könne, mag hier als vorläufige Anwendung eben dieser Methoden betrachtet werden.

Newtons I. Regel ist: Wenn $ax^2+bx+c=0$ und $fx^2+gx+h=0$ ist: so erhält man durch Wegschaffung der Größe x die Normgleichung

$$(ah-bg-2cf)\,ah+(bh-cg)\,bf+(ag^2+cf^2)\,c=0.$$

Beweis. Nach §. 87. ist $afx^2+bfx+fc=0$, und $afx^2+agx+ah=0$, daher durch Reduktion und Versetzung $bfx-agx=ah-fc$, oder $x=\frac{ah-fc}{bf-ag}$, folglich $x^2=\frac{a^2h^2-2ahfc+c^2f^2}{(bf-ag)^2}$. Diese Werthe für x^2 und x in der gegebenen ersten Gleichung substituirt, hat man $\frac{a^3h^2-2a^2hfc+ac^2f^2}{(bf-ag)^2}+\frac{abh-bfc}{bf-ag}+c=0$, oder $a^3h^2-2a^2hfc+ac^2f^2+(abh-bfc)(bf-ag)+(bf-ag)^2c=0$. Bringt man hierin die Klammern weg und reduzirt gehörig: so hat man obige Normgleichung.

II. Regel. Aus A) $ax^3+bx^2+cx+d=0$, und B) $fx^2+gx+h=0$ geht durch Elimination von x die Normgleichung hervor:

$$(ah-bg-2cf)\,ah^2+(bh-cg-2df)\,bfh+(ch-dg)(ag^2+cf^2)+(3agh+bg^2+df^2)\,df=0.$$

Beweis. Um zuerst x^3 zu eliminiren, multiplizire man B) mit ax und A) mit f, und ziehe jene veränderte Gleichung von dieser ab: so hat man C) $(bf-ag)x^2+(cf-ah)x+fd=0$.

Man multiplizire nun C) mit f und B) mit (bf—ag), ziehe diese veränderte Gleichung von jener ab: so findet man

$$x=\frac{bfh-f^2d-ahg}{cf^2-ahf-bgf+ag^2}.$$

Wenn man diesen Werth von x der Kürze wegen durch $\frac{M}{N}$ ausdrückt und ihn in B) substituirt: so hat man

$\frac{fM^2}{N^2} + \frac{gM}{N} + h = 0$, oder $fM^2 + gMN + hN^2 = 0$.

Aus dieser Gleichung resultirt durch gehörige Substitution für M und N und Reduktion obige Newton'sche Normgleichung.

Auf gleiche Weise deduzirt man die 2 andern Regeln, nämlich:

III. Regel. Wenn man aus den Gleichungen $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, und $fx^2 + gx + h = 0$ die Größe x eliminirt: so hat man

$(ah - bg - 2cf)\,ah^3 + (bh - cg - 2df)\,bfh^2 + (ag^2 + cf^2)(ch^2 - dgh + eg^2 - 2efh) + (3agh + bg^2 + df^2)dfh + (2ah^2 + 3bgh - dfg + ef^2)ef^2 - (bg + 2ah)efg^2 = 0.$

IV. Regel. Wenn aus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, und $fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$ die Größe x eliminirt wird: so wird die Gleichung gefunden

$(ah - bg - 2cf)(adh^2 - achk) + (ak + bh - cg - 2df)bdfh + (bh + 2cg + 3df - ak)\,a^2k^2 + (cdh - d^2g - c^2k + 2bdk)(ag^2 + cf^2) + (3agh + bg^2 + df^2 - 3afk)\,d^2f + (cg + df - bh - 3ak)\,bcfk + (bk - 2dg)\,b^2fk - (b^2k + 3adh + cdf)\,agk = 0.$

Um noch auf die nützliche Anwendung dieser Regeln, wenn gleich nur im Gebiete der höheren Analysis, aufmerksam zu machen, mag das von Newton selbst angeführte Beyspiel dienen. Soll nämlich aus den Gleichungen $x^2 + 5x - 3y^2 = 0$, und $3x^2 - 2xy + 4 = 0$ die Größe x weggeschafft werden: so setze man den der Regel I. zum Grunde liegenden Gleichungen gemäß $a = 1$, $b = 5$, $c = -3y^2$; $f = 3$, $g = -2y$ und $h = 4$. Man erhält demnach durch Substitution in der Normgleichung diese Gleichung:

$(4 + 10y + 18y^2)4 + (20 - 6y^3)15 + (4y^2 - 27y^2) \times -3y^2 = 0$, oder $16 + 40y + 72y^2 + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

Anwendung dieser Methoden.

§. 88. Aufgabe 1. Von 2 Materien A, B, von verschiedenem spezifischen Gewichte, 1 Cubikzoll von A wiege nämlich a Unzen, und 1 C.z. von B wiege b U., soll eine Mischung gemacht werden, deren Volumen $= c$ Cub.z. und welche d U. wiegt: wieviel muß man von jedem Stoffe nehmen?

Formirung der Gleichung. Die Antheile beyder Stoffe zur Mischung, x von A und y von B, geben ein Volumen von c Cub.z.; also ist 1) $x + y = c$. Weil ferner die Quantität des Antheils von A wiegt ax Unzen, und die des 2ten bx U.: so ist nach der Bedingung der Aufgabe 2) $ax + by = d$.

Aufl. Sucht man z. B. nach der ersten Methode aus 1) und 2) die Werthe von x: so erhält man die Gleichung $c - y = \frac{d - by}{a}$, woraus $y = \frac{ac - d}{a - b}$, und dann durch Subst. $x = \frac{d - bc}{a - b}$.

Diese Werthe hätte man auf der Stelle erhalten, wenn man die Gleichungen des §. 85. als Formeln betrachtet, und in den dortigen Werthen für x und y gesetzt hätte $a = 1$, $b = 1$, $s = c$, $m = a$, $n = -b$. Eben so hätte man sich der Formeln des Zus. §. 87. bedienen können.

Zusatz 1. Diese Auflösung gilt für alle Aufgaben, welche zur Vermischungsrechnung (s. S. 225. Z.) gehören. Man darf daher in obigen Formeln nur die durch jede spezielle Aufgabe bestimmte Zahlen substituiren, um x und y für den besondern Fall zu haben.

Beyspiel. Man soll Gold mit Silber legiren, die ganze Mischung soll 12 Cub.z. im Volumen haben und 100 Unzen wiegen. Wenn nun 1 C.z. Gold. $12\frac{2}{3}$ U. und

1 C.z. Silber 6$\frac{2}{3}$ U. wiegt: wieviel braucht man von beyden Metallen zur Mischung?

Hier ist d = 100; c = 12; b = 6$\frac{2}{3}$; a = 12$\frac{2}{3}$; diese bestimmten Zahlen in den Formeln unserer Aufgabe substituirt, ist x = 3 C.z. Gold, y = 9 C.z. Silber.

Zusatz 2. Drückt man die den Formeln gemäß vorzunehmenden arithmetischen Operationen mit Worten aus: so hat man eine Regel, vermöge welcher alle Beyspiele über die Vermischungsrechnung können berechnet werden.

Auch Beyspiele, welche der allgemeinen Aufgabe weniger ähnlich sehen, löst man nach dieser Regel oder den allgemeinen Formeln auf.

Z. B. man soll 710 fl. in 600 Stücken, theils Laubthaler, theils 24 kr. Stücke, ausprägen: wieviel Stücke jeder Sorte müssen geschlagen werden?

Man räsonnire: man soll eine Mischung von 600 = c Cub.z. machen, welche 710 = d Unzen wiegt; der C.z. des einen zu mischenden Stoffes wiegt 2$\frac{3}{4}$ (Gulden = 1 Laubth.) = a Unzen; der C.z. des andern wiegt $\frac{2}{5}$ (fl. = 1 24 kr. St.) = b U.

Daraus sieht man, daß unsere Formeln auch für diesen Fall gültig sind, und welche bestimmte Zahlen für die bekannten Größen substituirt werden müssen, um x = 200 St. L. und y = 400 zu finden.

§. 89. Aufgabe 2. Man soll 2 Materien A, B von verschiedenem Werthe so mischen, daß ein Mittelwerth für die Mischung herauskommt. Hier fragt man bloß nach dem Verhältniß der x Theile des bessern Ingredienz zu den y Theilen vom schlechtern, nicht aber nach einer bestimmten Quantität von beyden Materien (eigentliche Alligationsrechnung).

Aufl. Ist a der Werth oder Gehalt vom bessern A, und b der Gehalt von B, m der Mittelwerth und x : y

das Verhältniß: so hat man die Gleichung $m(x+y) = ax+by$; oder $(a-m)x=(m-b)y$, d. i.

$$m-b : a-m = x : y$$ (§. 144. 3.)

Hieraus fließt die im §. 173. meiner Ziffernr. angeführte Regel.

Beyspiel. 15löthiges Silber in dem Verhältnisse mit 10löthigem zu mischen, daß die Mischung 13löthig wird.

Hier ist $x : y = 13-10 : 15-13 = 3 : 2$ (oder $= 6 : 4$, oder $= 9 : 6$), d. i. zu 3 (oder zu 6, oder zu 9) Theilen des besseren Silbers muß man 2 (oder resp. 4, oder 6) Theile des geringeren mischen, um durch die Mischung beyder 13löth. Silber zu erhalten.

Zusatz. Wäre aber eine bestimmte Quantität der Mischung $= c$ angegeben: so hätte man die Gleichungen

$$x + y = c$$
$$mx + my = ax + by,$$

woraus man $x = \frac{c(m-b)}{a-b}$ und $y = \frac{c(a-m)}{a-b}$ findet.

Beyspiel. Aus 2 Sorten Weins, den Eimer zu 14 und zu 9 Thlr., eine Mischung zu machen von 10 Fudern, den Eimer zu 12 Thlr.

Hier ist $a = 14$; $b = 9$; $m = 12$; $c = 10$. Durch Substitution dieser Werthe in den vorigen Formeln für x und y findet man $x = 6$ und $y = 4$ (Fuder).

§. 90. Aufgabe 3. Aus der gegebenen Summe und Differenz zweyer Zahlen diese selbst zu finden.

Aufl. Wenn $x > y$ und $s =$ der Summe, $d =$ dem gegebenen Unterschiede: so hat man

1) $x + y = s$
2) $x - y = d$

durch Subtraktion der Gl. 2) von 1) $y = \frac{s-d}{2}$, und

durch Addition beyder Gleichungen $x = \frac{s+d}{2}$, d. i. die größere Zahl ist gleich der halben Summe + der halben Differenz, und die kleinere?

Läßt man noch allgemeiner s ein Ganzes überhaupt (z. B. eine Linie, oder eine Fläche, . . .), x dessen größeren und y dessen kleineren Theil bezeichnen: so hat man an obigen Formeln für x und y allgemeine Wahrheiten, die in der Mathematik nicht selten mit großem Nutzen angewendet werden.

§. 91. Aufgabe 4. Zwey solche Zahlen zu finden, daß der Würfel der ersten gleich sey dem Quotienten aus der ersten durch die zweyte dividirt, das Produkt aber aus dem Quadrate der ersten in den Würfel der zweyten gleiche dem Quotienten, welcher aus der Division der zweyten Zahl durch das Quadrat irgend einer bekannten Zahl erhalten wird.

Der Aufgabe gemäß müssen die Gleichungen

$$x^3 = \frac{x}{y} \text{ und } x^2y^3 = \frac{y}{a^2}$$

gebildet werden: woraus man (besonders nach §. 76. Zus.) $x = a$ und $x = \frac{1}{a^2}$, folglich, wenn $a = 4$ ist, $x = 4$ und $y = \frac{1}{16}$ findet.

§. 92. Aufgabe 5. Aus 2 Röhren A, B läuft Wasser in ein Gefäß; die erste R. läuft 2 Stunden, die 2te 3 St., man findet 195 Maße im Gefäß; das zweytemal läuft jene 5, diese 4 St., man findet 330 M. im Gefäß: wieviel goß jede Röhre stündlich?

Aufl. Substituirt man z. B. in den Gleichungen des §. 85. die hier bestimmten Zahlen, so daß ny positiv wird: so geben die algebraischen Ausdrücke von x und y die Auflösung. Nämlich $x = 30$, $y = 45$. Wenn nämlich das erstemal die Röhre A in 1 St. giebt x M.,

also in 2 St. 2x M., und eben so die Röhre B in 3 St. 3y M.: so hat man die Gleichung $2x + 3y = 195$, und auf dieselbe Weise auch die zweyte Gleichung $5x + 4y = 330$.

D.

Methoden der Auflösung reiner Gleichungen mit 3 unbekannten Größen.

§. 93. Erste Methode. Man sucht die Werthe für eine und dieselbe unbekannte Größe aus den 3 Gleichungen, bildet aus dem ersten und zweyten, dann ersten und dritten (oder 2ten und 3ten) 2 neue Gleichungen, und verfährt dann nach §. 85.

Aufgabe. Ungleiche Mischungen aus mehreren Dingen so zusammenzusetzen, daß die untereinander gemischten Sachen in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Bildung der Gleichungen. Die gegebene Quantität der einen Mischung sey $dA + eB + fC$, der andern $gA + hB + kC$, der dritten $lA + mB + nC$, wo A, B, C die gemischten Dinge, und d, e, f ... die bestimmten Theile von einer jeden Sache in der Mischung bedeuten. Die Mischung aber, welche aus diesen 3 gemacht werden soll, sey $pA + qB + rC$. Denkt man sich nun, x, y, z seyen die Zahlen, mit welchen jene 3 Mischungen multiplizirt, diese zusammengenommen die gefoderte Mischung $pA + qB + rC$ geben: so ist

$$\left.\begin{array}{l} dxA + exB + fxC \\ + gyA + hyB + kyC \\ + lzA + mzB + nzC \end{array}\right\} = pA + qB + rC.$$

Hieraus entstehen die 3 Gleichungen

P) $dx + gy + lz = p$
Q) $ex + hy + mz = q$
R) $fx + ky + nz = r.$

Auflösung. Aus P) $x = \frac{p-gy-lz}{d}$ = (aus Q) $\frac{q-hy-mz}{e}$ = (aus R) $\frac{r-ky-nz}{f}$. Hieraus bildet man die 2 Gleichungen S) $\frac{p-gy-lz}{d} = \frac{q-hy-mz}{e}$ und T) $\frac{q-hy-mz}{e} = \frac{r-ky-nz}{f}$.

Aus S) und T) y gesucht: kömmt man auf die Gleichung

V) $\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh} (=y) = \frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$.

Setzt man der Kürze halber $ep-dq = \alpha$; $dm-el = \beta$; $eg-dh = \gamma$; $fq-er = \delta$; $en-fm = \zeta$; $fh-ek = \vartheta$: so wird aus V) $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma} = \frac{\delta+\zeta z}{\vartheta}$, folglich $z = \frac{\alpha\vartheta-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\vartheta}$; $y = \frac{\alpha+\beta z}{\gamma}$ (durch Subst.) $= \frac{\alpha\zeta-\beta\delta}{\gamma\zeta-\beta\vartheta}$; $x = \frac{p-gy-lz}{d}$ (durch Substitution für y und z) $= \frac{p(\gamma\zeta-\beta\vartheta)-g(\alpha\zeta-\beta\delta)-l(\alpha\vartheta-\gamma\delta)}{(\gamma\zeta-\beta\vartheta)d}$.

Beyspiel. Man habe 3 Stangen zusammengeschmolzenes Metall, deren erste auf 1 ℔ der Mischung hält 12 Unzen Silber, 1 U. Kupfer und 3 U. Zinn, die zweyte eben so in 1 ℔ der Mischung 1 U. Silber, 12 U. Kupfer, 3 U. Zinn; die 3te auf 1 ℔ 14 U. Kupfer, 2 U. Zinn, 0 U. Silber. Man soll eine 4te Stange aus diesen 3 zusammensetzen, welche in 1 ℔ der Mischung 4 U. Silber, 9 U. Kupfer und 3 U. Zinn enthält. Wieviel Pfundtheile muß man von jenen 3 Stangen zu dieser 4ten nehmen?

Hier ist d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r,
12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3.

$\alpha(=ep-dq=1.4-12.9)=-104$; $\beta(=dm-el)=168$: eben so $\gamma=-143$; $\delta=24$; $\zeta=-40$ und $\vartheta=33$. Also

$$z\left(=\frac{\alpha\vartheta-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\vartheta}=\frac{-3432+3432}{5720-5544}\right)=0;$$

$$y\left(=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{-104+0}{-143}\right)=\tfrac{8}{11}\ (\S.\ 47.)$$

$$x\left(=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{4-\frac{8}{11}}{12}\right)=\tfrac{3}{11}.$$

Mischt man also $\frac{8}{11}$ Theile eines Pfundes von der zweyten Stange und $\frac{3}{11}$ Theile von der 3ten zusammen, so bekömmt man eine Mischung, die auf 1 ℔ 9 U. Kupfer, 3 U. Zinn und 4 U. S. hält.

§. 94. Zweyte Methode. Hat man die 3 Gleichungen M, N, O: so sucht man aus M z. B. den Werth für eine unbekannte Größe, und substituirt ihn statt dieser in N und O. Dadurch geht N in die Gleichung G, und O in H über. Mit diesen 2 neuen Gleichungen G, H verfährt man dann nach §. 86.

Aufgabe. Es seyen die Preise mehrerer Mischungen aus denselben Dingen gegeben, man wisse auch das Verhältniß der zu jeder Mischung von jedem Dinge genommenen Theile; man soll den Preis eines jeden Ingredienz der Mischung finden.

Bildung der Gleichungen. Der Preis der einen Mischung aus den 3 Materien A, B, C, $dA+gB+lC$ sey p; der Preis der Mischung $eA+hB+mC$ sey q; der Preis der 3ten Mischung $fA+kB+nC$ sey r. Da man nun von A, B, C die Preise sucht, so substituire man für die Stoffe A, B, C ihre Preise x, y, z: so erhält man wieder die 3 Gleichungen P, Q, R des §. 93.

Aufl. Man suche nun den Werth von x und Q, und substituire diesen $= \frac{q-hy-mz}{e}$ in P) und R) so hat man

S) $dq - dhy - dmz + egy + elz = ep$

$\left(\text{Also } y = \frac{ep-dq+(dm-el)z}{eg-dh} = \frac{\alpha+\beta z}{\gamma} \text{ (§. 93.)}\right)$

und T) $fq + (ek-fh)\ y + (en-fm)\ z = er$

Oder $-\vartheta y + \zeta z = -\delta$ (§. 93.).

Den aus S) gefundenen Werth für y, nämlich $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}$ in T) substituirt, ist endlich

V) $-\alpha\vartheta - \beta\vartheta z + \gamma\zeta z = -\gamma\delta.$

Woraus $z = \frac{\alpha\vartheta - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\vartheta}$, und daher auch y und x gerade, wie oben, gefunden werden.

Beyspiel. Es kauft jemand 30 Metzen Korn, 20 M. Gerste, 16 M. Hafer zusammen um 48 fl. 30 kr; ein andersmal 15 M. Korn, 35 M. Gerste, 50 M. H. zusammen um 78 fl. 45 kr.; das drittemal 40 M. Korn, 10 M. G. 24 M. H. zusammen für 59 fl. Wie hoch kommt dem Käufer die Metze von jeder Getraidsorte zu stehen?

Man setze d, e, f; g, h, k; l, m, n;
30, 15, 40; 20, 35, 10; 16, 50, 24;
p, q, r
$48\frac{1}{2}, 78\frac{3}{4}, 59$. Also ist $\alpha = ep - dq = -1635$; $\beta = dm - el = +1260$; $\gamma = -750$; $\delta = +2265$; $\zeta = -1640$; $\vartheta = +1250$. Diese Werthe in den Formeln substituirt, findet man

$$z = \frac{\alpha\vartheta - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\vartheta} = \frac{-345000}{-345000} = 1.$$

$$y = \frac{\alpha+\beta z}{\gamma} = \frac{-375}{-750} = \frac{1}{2}.$$

$$x = \frac{q-hy-mz}{e} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$

d. i. unter obigen Bedingungen kostet die Metze Korn 45 kr., die M. Gerste 30 kr. und die M. Hafer 1 fl.

§. 95. Dritte Methode. Man addirt oder subtrahirt z. B. die erste Gleichung von der 2ten, und diese von der 3ten. Dadurch bekömmt man 2 Gleichungen, mit welchen man nach §. 87. verfährt.

Beyspiel. Drey Mädchen tragen Aepfel zur Stadt; die Anzahl der Aepfel des ersten doppelt genommen, und die Anzahl des zweyten hinzugethan, bekömmt man die Anzahl des dritten doppelt $+20$. Die Anzahl der Aepfel des ersten von der des dritten weggenommen, hat man den 3ten Theil von der Anzahl des zweyten, die Aepfel Aller zusammen geben das 3fache der Aepfel des 2ten. Wieviel Aepfel trug ein jedes der 3 Mädchen?

Aufl. Diesen Bedingungen gemäß haben folgende 3 Gleichungen statt:

I) $2x+y=2z+20$

II) $z-x=\frac{y}{3}$

III) $x+y+z=3y.$

II) durch 2 multiplizirt und zu I) addirt, erhält man $y=60$. Dann II) zu III) addirt, hat man $7y=6z$; diese Gleichung von $y=60$ (mit 7 zuvor multiplizirt) abgezogen: hat man $z=70$; $y=60$; $x=50$.

Zusatz. Wie man auch hier auf ähnliche Art, wie §. 87. Zus., verfahren müsse, wollen wir kurz am gegebenen Beyspiele nachweisen.

Hebt man den Bruch in II) auf, multiplizirt II) mit m und III) mit n und addirt beyde Gleichungen zu I): so erhält man zugleich durch Metathesis und Reduktion

$x(2+n-3m)+y(1-m-2n)+z(3m+n-2)=20.$

Will man nun z. B z finden, so setze man

1) $2-3m+n=0$

2) $1-m-2n=0.$

Demnach hat man noch $z(3m+n-2)=20$, und hieraus $z=\frac{20^{m}}{3m+n-2}$.

Es kömmt nun bloß darauf an, m und n zu bestimmen. Man multiplizire 2) mit p und addire dann 2) zu 1); so hat man

3) $m(-3-p)+n(1-2p)+2+p=0$,

woraus, wenn 4) $-3-p=0$ gesetzt wird, $n=\frac{-2-p}{1-2p}$.

Aber aus 4) ist $p=-3$; folglich $n=\frac{1}{7}$; und aus 2) $m=1-2n=\frac{5}{7}$; folglich $z=70$, wie oben.

II.

Unbestimmte Analytik,

oder

unbestimmte Aufgaben mit begrenzter Anzahl von Auflösungen*) (§. 73.).

§. 96. Aufgabe 1. Auf wievielerley Art kann man 619 fl. so zahlen, daß man immer, indem man Stücke von 9 fl. empfängt, andere von 14 fl. dagegen giebt?

Auflösung. Es sey x die Anzahl der Stücke Geldes, die man zur Zahlung von 619 fl. giebt, und y die Anzahl derjenigen Stücke, die man dagegen empfängt. Man muß also $14x-9y$ zur Zahlung von 619 fl. geben, d. i.

A) $14x-9y=619$.

---

*) Die Verschrift, unbestimmte Aufgaben aufzulösen, wurde vielleicht eben dieser Unbestimmtheit wegen von den älteren Rechenmeistern Regel Cöci oder Zekis (regula virginum, regula potatorum) genannt.

Also 1) $y = \frac{14x-619}{9} =$ (indem man durch 9 dividirt)

$x - 68 + \frac{5x-7}{9}$.

Sollen nun y sowohl als x ganze und positive Zahlen seyn, so muß $\frac{5x-7}{9}$ auch eine ganze Zahl z. B. $= m$ seyn. Es ist daher

$$2)\ x = \frac{9m+7}{5} = m + 1 + \frac{4m+2}{5}.$$

Setzt man nun $\frac{4m+2}{5} = n$, d. i. wieder gleich einer ganzen Zahl: so ist

$$3)\ m = \frac{5n-2}{4} = n + \frac{n-2}{4}.$$

Setzt man eben so $\frac{n-2}{4} = p$ (= einer ganzen Zahl): so ist 4) $n = 4p + 2$.

Man erhält nun durch Subst. in 3) $m = 5p + 2$

. . . . . in 2) $x = 9p + 5$

. . . . . in 1) $y = 14p - 61$.

Hieraus ergiebt sich, daß dem Werthe für x gemäß jede mögliche ganze Zahl für p genommen werden dürfte, so, daß man unendlich viele Auflösungen erhielte. Betrachtet man aber den Werth von y: so sieht man, daß $p > \frac{61}{14}$, d. i. > 4 genommen werden müsse. Demungeachtet kann unsere Aufgabe noch auf eine unendlich verschiedene Art aufgelöst werden, indem man von der Zahl 5 an aufwärts alle mögliche ganze Zahlen für p substituirt.

Setzt man z. B. p nacheinander $= 5; 6; 7 \ldots$

so wird

$x = 50 \ldots y = 9$
$x = 59 \ldots y = 23$
$x = 68 \ldots y = 37$
. . . . . .

Diese Werthe für x und y in A) substituirt, findet man, daß sie auf gleiche Weise die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Indessen wird oft durch die Bedingung, „ganze positive Zahlen aufzufinden", die Anzahl der Auflösungen einer unbestimmten Aufgabe sehr beschränkt, wie bey folgenden Aufgaben.

§. 97. Aufgabe 1. Einen auf den kürzesten Ausdruck gebrachten Bruch $\frac{z}{qrs\ldots}$ wieder in mehrere Brüche aufzulösen, deren Nenner die Faktoren jenes Bruches sind, wie $\frac{z'}{q} \pm \frac{z''}{r} \pm \frac{z'''}{s} \ldots$, und deren Summe oder Differenz gleich ist dem vorgegebenen Bruche.

Beyspiel. Es sey $\frac{31}{35}$ dieser Bruch und $= \frac{a}{5} + \frac{b}{7} = \frac{7a+5b}{35}$. Demnach ist $7a+5b=31$, und a und b sind als ganze Zahlen zu bestimmen. Die Gleichung giebt vorerst $a = \frac{31-5b}{7} = 4 + \frac{3-5b}{7}$. Setzt man $\frac{3-5b}{7} = m$ (als ganze Zahl), so ist $b = \frac{3-7m}{5} = -m + \frac{3-2m}{5}$. Setzt man wieder $\frac{3-2m}{5} = n$: so ist $m = \frac{3-5n}{2} = 1 - 2n + \frac{1-n}{2}$. Endlich $\frac{1-n}{2} = p$ (d. i. wie n, einer ganzen Zahl) gesetzt, hat man $n = 1-2p$. Also wird durch Substitution $m = 5p-1$; $b = 2-7p$ und $a = 3+5p$ gefunden. Der Werth von b zeigt, daß wenn b und a zugleich $+$zahlen seyn sollen, nur ein einziger Werth für a und b der Aufgabe Genüge leiste, nämlich der, welchen man erhält, indem man $p = 0$

setzt, wodurch $a = 3$ und $b = 2$, also die Brüche mit den kleinsten +zählern $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ zum Vorschein kommen. Dagegen, wenn man diese Einschränkung nicht macht, unzählige Auflösungen möglich sind, indem man $p = 1 = 2 = 3 \ldots$ setzt.

Aufgabe 2. Man will 351 fl. in 31 Stücken münzen, das Stück der ersten Sorte von 18 fl., das der zweyten von 11, das der dritten von 5 fl. Wieviele Stücke muß man von jeder Sorte münzen?

Auflösung. Man hat hier zwey Gleichungen

$$A) \quad x + y + z = 31$$

$$B) \quad 18x + 11y + 5z = 351.$$

Eliminirt man z. B. x: so findet man

$$1) \quad y = \frac{207 - 13z}{7} = 29 - z + \frac{4 - 6z}{7}.$$

Da nun x, y, z ganze positive Zahlen seyn sollen: so muß $\frac{4-6z}{7} = m$ (= einer ganzen Zahl) seyn. Hieraus ist

$$2) \quad z = \frac{4 - 7m}{6} = -m + \frac{4 - m}{6}.$$

Eben so $\frac{4-m}{6} = n$ gesetzt; ist

$$3) \quad m = 4 - 6n.$$

Durch Substitution in 2) ist $z = 7n - 4$

. . . . in 1) . . . $y = 37 - 13n$

in A) . . . $x = 6n - 2$.

Indem die Werthe für x und z, für sich betrachtet, noch eine unendliche Menge von Auflösungen zulassen, wird unter obiger Bedingung durch den Werth für y diese Menge bis auf 2 Auflösungen beschränkt. Denn n darf nicht $> \frac{37}{13}$, d. i. nicht > 2 genommen werden. Also für n die Zahlen 1, 2 gesetzt, erhält man die entsprechenden Werthe

$z = 3; y = 24; x = 4;$
$z = 10; y = 11; x = 10.$

Eine ähnliche, Münzmeistern nützliche,

Aufgabe 3. ist: Aus 14-, 11- und 9löthigem Silber 30 Mark 12löth. zusammenzusetzen; wieviel muß man von jeder Sorte Silbers nehmen?

Man setze x Marke von der ersten Sorte, y M. von der zweyten und z M. von der dritten: so hat man die 2 Gleichungen

A) $x + y + z = 30$
B) $14x + 11y + 9z = 12.30 = 360,$

indem nämlich ein Mark von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber enthält: so haben die x Marke 14x Lothe, u. s. w. Die ganze Masse soll aber 30 Mark wiegen, und ein Mark 12 Loth fein Silber haben; also findet die Gleichung B) statt.

Auflösung. Man multiplizire A) mit 9 und ziehe die so veränderte Gleichung von B) ab: so hat man 1) $5x + 2y = 90$, also 2) $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Setzt man nun, da ganze Zahlen zu finden sind, $x = 2n$: so ist 3) $y = 45 - 5n$ und daher 4) $z(= 30 - x - y) = 3n - 15$. Man darf also, damit z einen +werth erhalte, n nicht < 5, und nach 3) nicht > 9 nehmen, da auch y eine +zahl seyn soll. Es finden daher nur folgende 5 Werthe für jede der gesuchten Größen statt: nämlich

wenn $n = 5 = 6 = 7 = 8 = 9$ gesetzt wird:
so ist $x = 10 = 12 = 14 = 16 = 18$
$y = 20 = 15 = 10 = 5 = 0$
$z = 0 = 3 = 6 = 9 = 12.$

Anmerkung. Einige Schriftsteller rechnen lediglich derley Aufgaben, wie die 2 letzten, in welchen die gesuchten Größen Faktoren gegebener Zahlen in der einen Gleichung, und in der andern Gleichung Summanden sind, zur Regel Cöci oder Virginum

weil auch Blinde oder unstudirte Mädchen ihre Auflösung finden könnten.

Zusatz 1. Dadurch, daß man den Quotienten bey diesen Divisionen um 1 höher nimmt, als man ihn eigentlich nehmen sollte, werden dieselben wegen des kleineren Restes öfters früher vollendet. Es sey z. B. die Gleichung $19y = 52x + 139$. Statt nun zu setzen $y = 2x + 7 + \frac{14x+6}{19}$, nehme man 3 zum Quotienten, und setze $y = 3x + 7 + \frac{6-5x}{19}$. Verfährt man auf gleiche Weise bey den folgenden Divisionen: so kömmt man offenbar schneller zum Ziele.

Zusatz 2. Man begreift leicht, daß diese Methode zum Prinzip hat: ganze Zahlen addirt oder subtrahirt, oder durch ganze Zahlen multiplizirt, geben immer ganze Zahlen zum Resultat. Da aber eine ungerade Zahl durch eine gerade dividirt, eben so wenig eine ganze Zahl zum Quotienten geben kann, als die Division aus einer kleineren Zahl durch eine größere: so sieht man ein, daß Aufgaben, die zu Gleichungen, wie diese: $6x = 6y + 7$, und $14x = 4y - 11$, führen, etwas Absurdes involviren, wenn sie fodern, ganze und positive Zahlen zu finden.

Zusatz 3. Mehr als bestimmte Aufgaben (§. 73.) erkennt man dadurch, daß man bey ihren Auflösungen auf identische Gleichungen, die sich auf $0 = 0$ reduziren, kömmt. So kömmt man bey den §. 73. angeführten Gleichungen auf diese: $36 - 24y = 36 - 24y$, d. i. auf $0 = 0$.

Man habe eben so die 3 Gleichungen

$$5x + 3y + 2z = 17$$
$$8x + 2y + 4z = 20$$
$$18x + 8y + 8z = 54.$$

Verfährt man hier nach §. 93.: so findet man $y = \frac{36+4z}{14}$ und $y = \frac{36+4z}{14}$; woraus z gesucht, $0=0$ erhalten wird.

Man hat daher im 1t. Beyspiele eigentlich nur eine, im 2t. Beyspiele nur zwey Gleichungen.

Würde man die hier gegebenen Zahlen in einer der Formeln des §. 93. substituiren: so erkennte man die Unbestimmtheit dieser Aufgabe sogleich daran, weil Zähler und Nenner jener Formeln 0 würden.

Sollte die Auflösung von derley Gleichungen vom ersten Grade auf etwas Unmögliches, wie $4=5$, führen: so ist die Frage selbst absurd. Z. B. $5x+3y=30$; $20x+12y=135$. Sonst aber verfährt man, nachdem man die identische Gleichung weggelassen hat, nach §§. 96. 97.

Zusatz 4. Zu den unbestimmten Aufgaben wird mit Recht auch die, nicht selten nützliche, Frage gerechnet: Wenn in einer algebraischen Irrationalgröße eine unbekannte Größe vorkömmt, welche Werthe können für diese substituirt werden, damit der gegebene Irrationalausdruck rational werde? Denn die Beantwortung dieser Frage geschieht durch die Bildung und Auflösung zweckdienlicher Gleichungen.

Beyspiel 1. Es sey in $\sqrt{(1+x^2)}$ die Größe x so zu bestimmen, daß jener Ausdruck rational werde.

Da die Quadratwurzel aus $(1+x) > x$, aber $< 1+x$ ist, so setze man $\sqrt{(1+x^2)} = x +$ einem ächten Bruche, z. B. $= x + \frac{n}{m}$, wo also $n < m$. Daher hat man $(1+x^2) = \left(x+\frac{n}{m}\right)^2 = x^2 + \frac{2nx}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ und hieraus $x = \frac{m^2-n^2}{2mn}$, wo man für m und n jede

beliebige Zahl setzen kann. Auch sieht man, daß nun

$$\sqrt{(1+x^2)} = \sqrt{(1+\left(\frac{m^2-n^2}{2mn}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{4m^2n^2+(m^2-n^2)^2}{4m^2n^2}} = \sqrt{\frac{(m^2+n^2)^2}{4m^2n^2}} = \frac{m^2+n^2}{2mn},$$

d. i. rational sey. Nimmt man z. B. $m=3$ und $n=2$; so ist $x = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$, daher $\sqrt{(1+x^2)} =$

$$\sqrt{\left(1+\frac{25}{144}\right)}\sqrt{\frac{169}{144}} = \pm\frac{13}{12}.$$

Beyspiel 2. Es sey $\sqrt{(a+bx+c^2x^2)}$, wo c^2 eine Quadratzahl ist. Man setze daher jene Größe $= cx + \frac{n}{m}$, oder $a+bx+c^2x^2 = c^2x^2 + \frac{2cnx}{m} + \frac{n^2}{m^2}$: so entwickelt man hieraus leicht $x = \frac{n^2-am^2}{bm^2-2cmn}$, und durch Substitution wird $\sqrt{(a+bx+c^2x^2)}$

$$= \sqrt{\left[a+\frac{b(n^2-am^2)}{bm^2-2cmn}+\frac{c^2(n^2-am^2)^2}{(bm^2-2cmn)^2}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{[a(bm^2-2cmn)^2+b(n^2-am^2)(bm^2-2cmn)+c^2(n^2-am^2)^2]}}{bm^2-2cmn}$$

$$= \frac{\sqrt{[m^2(bn-acm)^2-2(bn-acm)cmn^2+c^2n^4]}}{bm^2-2cmn}$$

$$= \frac{m(bn-acm)-cn^2}{bm^2-2cmn}, \text{ d. i. rational.}$$

Hat man z. B. den Ausdruck $\sqrt{(2+3x+4x^2)}$, so, daß für diesen Fall ist $a=2$, $b=3$ und $c=2$: so wird $x = \frac{n^2-2m^2}{3m^2-4mn} = \frac{n^2-2m^2}{m(3m-4n)}$. Man sieht hieraus, daß man für m und n (n aber $<$ m) jede beliebige Zahl, nur nicht $n = \frac{3}{4}m$ nehmen dürfe, weil sonst $4n = 3m$, oder $3m-4n=0$, daher $x=\infty$ würde. Nimmt man folglich z. B. $m=1$ und $n=\frac{1}{3}$: so wird $x = -\frac{17}{15}$ und

$$\sqrt{(2+3x+4x^2)} = \sqrt{(2-\frac{51}{15}+\frac{4.17^2}{15^2})}$$
$$= \sqrt{\frac{2.15^2-51.15+4.17^2}{15^2}} = \sqrt{\frac{841}{15^2}} = \pm\frac{29}{15}.$$

Es erhellt übrigens, daß die für x hier entwickelte Formel die obige im Beysp. 1. gefundene, wie es seyn muß, wieder gebe, wenn man $a = c = 1$ und $b = 0$ setzt.

Beyspiel 3. Es sey das erste Glied obiger Irrationalgröße eine Quadratzahl, oder man habe

$$\sqrt{(a^2+bx+cx^2)}.$$

Setzt man daher diesen Ausdruck $= a+px$, oder $a^2+bx+cx^2 = a^2+2apx+p^2x^2$: so findet man $x = \frac{2ap-b}{c-p^2}$, und durch Substitution dieses Werthes wird, wie man auf obige Weise zeigen kann, der gegebene Ausdruck rational.

Z. B. für $\sqrt{(\frac{1}{4}+x+2x^2)}$, wo also $\frac{1}{2} = a$, $1 = b$ und $c = 2$ ist, wird $x = -\frac{1}{2}$ gefunden, wenn man $p = 2$ nimmt, und der gegebene Ausdruck wird $= \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$.

Beyspiel 4. Es sey in $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ weder a, noch c eine vollkommne Quadratzahl.

Man setze $a+bx+cx^2 = 0$ und entwickle nach §. 83. $x = \frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2c}$. Dieser Werth von x wird rational seyn, wenn $b^2-4ac =$ einer vollkommenen Quadratzahl $= m^2$ ist, so daß folglich nach §. 82. Zus. 4. $c(x+\frac{b+m}{2c})(x+\frac{b-m}{2c}) = c(x^2+\frac{b}{c}x+\frac{b^2-m^2}{4c^2}) = cx^2+bx+a = 0$ ist.

Wenn daher überhaupt, damit x rational sey,

$\sqrt{(a+bx+cx^2)} = \sqrt{(\alpha+\beta x)\,(\gamma+\delta x)}$, oder letztere Größe $= p(\gamma+\delta x)$, und demnach $(\alpha+\beta x)\,(\gamma+\delta x) = p^2(\gamma+\delta x)^2$, oder kürzer $\alpha+\beta x = p^2(\gamma+\delta x)$ gesetzt wird: so giebt der hieraus für x entwickelte Ausdruck, nämlich $x = \frac{p^2\gamma-\alpha}{\beta-p^2\delta}$, eine Formel, welche den in den vorigen Beyspielen für x entwickelten Formeln hinsichtlich des beabsichtigten Zweckes analog ist.

Wenn man z. B. die Werthe sucht, die man für x substituiren könne, damit $\sqrt{(10-17x+3x^2)}$ rational werde: so ist, da nun $a=10$, $b=-17$, $c=3$ ist,

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2c} = \frac{17\pm13}{6}, \text{ also } x=5, \text{ oder } =\tfrac{2}{3}.$$

Daher hat man $\sqrt{(10-17x+3x^2)} = \sqrt{3}(x-5)(x-\frac{2}{3})$ $= \sqrt{(x-5)(3x-2)}$. Nach den vorigen allgemeinen Faktoren ist daher in diesem Falle $\beta=1$, $\alpha=-5$; $\delta=3$; $\gamma=-2$; daher $x = \frac{p^2\gamma-\alpha}{\beta-p^2\delta} = \frac{-2p^2+5}{1-3p^2} = \frac{2p^2-5}{3p^2-1}$, so daß man für p jede beliebige Zahl setzen kann. Man nehme z. B. $p=\frac{1}{2}$, so ist $x=18$, folglich $\sqrt{(10-17x+3x^2)} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \pm\frac{13}{2}$.

Anmerkung 1. Viele Aufgaben, führend auf einfache Gleichungen, mit einer oder zwey unbekannten Größen, wurden wegen ihrer gefälligen Einkleidung, die sie ursprünglich von griechischen Mathematikern, besonders von Metrodor, erhalten haben sollen, von den späteren Mathematikern gesammelt, übersetzt und unter verschiedenen Formen häufig wieder gegeben. Heilbronner führt im Anhange seiner »historia matheseos universae« (Lips. 1742.) 45 solcher Aufgaben unter dem Namen »epigrammata arithmetica« mit dem griechischen und lateinischen Texte an. Hier nur einige dieser Aufgaben!

1.

Talibus aggreditur moerentem Cypris Amorem:
Ecquis, nate! animo dolor insidet? Ille ita contra:

Diripuere sinu Libethrides undique adortae
Decerpta ex Helicone sacro quae mala ferebam;
Clio malorum quintante, duodecimaque
Euterpe, octava sed gaudet parte Thalia.
Melpomenae cessit vicesima, Nomen habenti
A me septima; Terpsichore quatrante potitur.
Triginta me multavit Polyhymnia malis;
Uranie centum viginti; Calliopeque
Improbior raptis discessit onusta tricenis.
Ecce tibi manibus vacuis occurro, dearum
Relliquias, quinquaginta vix mala reportans.

Gleichung.

$\frac{1}{5}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{20}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{4}x + 30 + 120 + 300 + 50 = x$; woraus $x = 3360$.

2.

Mala ferunt calathis Charites, aequalia cuique
Mala insunt calatho. Musarum his obvia turba
Mala petunt: Charites cunctis aequalia donant.
Tunc aequalia Tres contingit habere Novemque.
Dic quantum dederint, numerus sit ut omnibus idem.

Gleichung.

Man ſetze, jede der 3 Grazien habe x Aepfel vor der Vertheilung gehabt und jeder der 9 Muſen y Aepfel gegeben: ſo hatte ſie nach der Vertheilung noch $x - 9y$ und jede Muſe $3y$ Aepfel, daher $x - 9y = 3y$, oder $x = 12y$, wo man für y jede ganze Zahl ſetzen kann, ſo daß für $y = 1$, $y = 2$, $y = 3 \ldots$ x (reſp.) wird $= 12 \; 24 = 36 \ldots$

3.

Aequo sequentem cum triente tertii.
Aequat sequens me, junctus et primi triens.
Super[illegible]m primi ego decem minis.

Gleichung.

Man setze, der Erste (A) habe x Minen: so hat der Dritte (C) $10+\frac{1}{3}x$, folglich der Zweyte (B) $(10+\frac{1}{3}x)+\frac{1}{3}x$ und A demnach $(10+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x)+(10+\frac{1}{3}x).\frac{1}{3}$; also gilt die Gleichung $10+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+(10+\frac{1}{3}x).\frac{1}{3}=x$; hieraus entwickelt man $x=60$ (Minen) für A, daher für C 30 und für B 50.

4.

Qui jaculamur aquas tres hic adstamus Amores,
Sed varie liquidas Euripo immittimus undas.
Dexter ego, summis et quae mihi manat ab alis
Ipsum lympha replet solo sextante diei.
Quattuor ast horis laevus versa influit urna,
Dimidiatque diem medius dum fundit ab arcu.
Dic age quam paucis Euripum implebimus horis
Ex arcu simul atque alis, urnaque fluentes?

Gleichung.

Setzt man den Inhalt des Behälters $= 1$, nimmt man ferner den Tag zu 12 Stunden an, so daß 4 St. $=\frac{1}{3}$ Tag ist, und schließt dann so: wenn die erste Röhre den Behälter in $\frac{1}{6}$ T. füllt, den wievielsten Theil desselben wird sie in x Tagen füllen? d. i. $\frac{1}{6}:x=1:(6x)$; u. s. w.: so hat man $(x:\frac{1}{6})+(x:\frac{1}{3})+(x:\frac{1}{2})=1$, oder $6x+3x+2x=1$, woraus $x=\frac{1}{11}$ (Tag) gefunden wird.

Für 2 Röhren ist eben so allgemein:

$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$, oder $x=\frac{ab}{a+b}$, und für 3 Röhren ist allgemein

$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1$, oder $x=\frac{abc}{bc+ac+ab}$; u. s. w.

5.

Una cum mulo vinum portabat asella,
Atque suo graviter ceu pondere pressa gemebat.
Talibus at dictis mox increpat ille gementem:
Mater quid luges tenerae de more puellae?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto:
At si mensuram capias, aequalia porto.
Optime mensuras distingue Geometer istas!

Allgemeine Gleichungen.

Wenn A x und B y (Maße, Pfunde, . . .) hat: so hat A nach der ersten Aenderung $x-a$ und B $y+a = 2(x-a)$; ferner hat B nach der zweyten Aenderung $y-b$ und A $x+b$, folglich nach der Bedingung der Aufgabe $y-b=x+b$. Man hat also die 2 Gleichungen

$$y+a = 2(x-a), \text{ und } y-b = x+b,$$

aus welchen man leicht $x=3a+2b$ und $y=4b+3a$, daher wenn, wie in unserem Falle, $a=b=1$ ist, $x=5$, $y=7$ findet.

Auch kann man die Aufgabe dadurch lösen, daß man vorerst nur eine Gleichung sucht. Wenn nämlich A nach der ersten Aenderung noch hat $x-a$, demnach B $2(x-a)$: so hatte B im Anfange $2(x-a)-a$, d. i. $2x-3a$. Hievon b weggenommen, hat B noch $2x-3a-b$, aber A $x+b$, als gleiche Last, folglich gilt diese Gleichung $2x-3a-b=x+b$, woraus, wie oben, $x=3a+2b$, daher die Last von $B=2x-3a=2(3a+2b)-3a=4b+3a$ gefunden wird.

Zusatz. Aehnliche Aufgaben sind folgende:

Minas decem da, triplus ut fiam tui (scil. *residui*);
At tu decem da, quintuplus fiam ut tui.

Oder:

Minas duas da, duplus ut fiam tui,
At tu duas da, quadruplus fiam ut tui.

Die erste Aufgabe leitet auf die Gleichungen:

$$x+10=3(y-10);\ y+10=5(x-10).$$

Anmerkung 2. In wiefern die sogenannte Arithmetica divinatoria, welche besonders von Dechales, Schwenter, Schott, Harsdörffer, Ozanam mit Aufgaben bereichert wurde, auf denselben Prinzipien und Regeln der niedern Analysis beruht: konnte sie, als weis, oder wahrsagende Kunst, nur dem Auge des jener letztern ächten Wissenschaft Unkundigen erscheinen. Eine einzige Aufgabe mag hier stehen!

Zu errathen, welche unter mehreren, mit bestimmten Plätzen (als erste, zweyte, ... Person) bemerkten, Personen einen Ring zu sich genommen habe? Man fodere Einen aus der Gesellschaft auf, die Zahl des Platzes, welcher dem gegenwärtigen Besitzer des Ringes vorher angewiesen war, zu verdoppeln, zum Produkte die Zahl 5 zu addiren, die Summe dann mit 5 zu multipliziren und das Produkt zu nennen. Diese genannte Zahl sey 115. Läßt man hievon die letzte Ziffer 5 weg und zieht von der übriggebliebenen Zahl 11 noch 2 ab: so zeigt der Rest 9, daß diejenige Person, die den 9. Platz angewiesen bekam, im Besitze des Ringes sey. Man hat nämlich die Gleichung $(2x+5)\,5=115$, also $x=\frac{115-25}{10}$ $=9$, und man sieht leicht, daß die Subtraktion der Zahl 25 von 115 und die Division durch 10 durch die oben zuletzt angegebene Vorschrift nur schneller vollzogen werde.

Mehrere solcher Aufgaben führt Heilbronner an dem oben citirten Orte an.

Sechster Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

I) Im Allgemeinen.

§. 98. **Erklärung.** Die Art, wie eine Größe aus der andern erzeugt wird, heißt Verhältniß (ratio), oder man betrachtet zwey Größen im Verhältnisse, wenn man auf die Art sieht, wie eine dieser Größen aus der andern erzeugt wird. Beyde Größen heißen Glieder (termini rationis); die erste Vorderglied, die zweyte Hinterglied des Verhältnisses. Sind beyde Glieder gleich: so heißt das Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit (ratio aequalitatis), wie a zu a, oder b zu b, ... Das Gegentheil heißt Verhältniß der Ungleichheit, wie a zu b; c zu d ...

§. 99. **Haupteintheilung mit Erklärung.** Sieht man bey dem Verhältnisse auf die Art, wie das Hinterglied aus dem Vordergliede dadurch entspringt, daß man zu diesem eine gewisse Zahl addirt oder davon subtrahirt, so betrachtet man das Verhältniß als ein arithmetisches. Jene Zahl, der Exponent des Verhältnisses, ist der Unterschied zwischen beyden Gliedern. Man setzt daher zwischen den beyden verglichenen Größen a, b das Zeichen —, indem man schreibt a—b (was man

a zu b lieſt), um anzudeuten, daß man jene Größen im arithmetiſchen Verhältniſſe betrachte.

Es ſey das arithmetiſche Verhältniß allgemein durch a—b (a zu b) ausgedrückt: Indem man nun b von a abzieht, iſt der geſuchte Unterſchied d entweder $=-d$ (wie in 2 zu 3), oder $=+d$ (wie in 3 zu 2), je nachdem b $>$ oder $<$ a iſt; d. i. man hat allgemein a — b (a weniger b) $=\mp d$, daher denn $b=a\mp d$. Setzt man dieſen Werth ſtatt b in obigem allgemeinen Ausdrucke: ſo erhält man an

$$a-(a\mp d) \text{ d. i. } (a \text{ zu } a\mp d)$$

nicht bloß einen allgemeinen, ſondern zugleich auch anſchaulichen Ausdruck oder eine Formel (§. 3.) des arithmetiſchen Verhältniſſes. Dieſer Ausdruck zeigt uns nämlich anſchaulich, daß, wenn a allgemein das erſte Glied des Verhältniſſes vorſtellt, das zweyte oder Hinterglied aus dem Vordergliede a entſtehe, indem eine Zahl d (der Exponent), die man durch Subtraktion des kleineren Gliedes vom größeren erhält, entweder zu a addirt, oder von a abgezogen werde, je nachdem das Hinterglied größer oder kleiner als das Vorderglied iſt.

Wenn daher das Vorderglied a, z. B. $=5$, und die Differenz oder der Exponent d, z. B. $=2$ gegeben iſt: ſo kennt man auch das Hinterglied, nämlich $5+2=7$, oder $5-2=3$, je nachdem es $>$ oder $<$ a ſeyn ſoll.

Wenn man aber bey dem Verhältniſſe auf die Art ſieht, wie das Hinterglied aus dem erſten dadurch entſpringt, daß man dieſes mit einer gewiſſen Zahl multiplizirt: ſo betrachtet man das Verhältniß als geometriſches. Jene Zahl, der Exponent (Name oder Renner) des Verhältniſſes, iſt der Quotient aus der Diviſion des Hintergliedes durch das Vorderglied. Man hat daher, um anzudeuten, daß man 2 Größen im geometriſchen Verhältniſſe betrachte, das zwiſchen denſelben

zu setzende Divisionszeichen (:) gewählt. So drückt z. B. a:b (a zu b) allgemein ein geometrisches Verhältniß aus.

Setzt man den Exponenten $\frac{b}{a} = e$, woraus denn b $= ae$ ist, und substituirt diesen Werth statt b in jenem allgemeinen Ausdrucke: so hat man an

a : ae d. i. (a zu ae), oder $\frac{ae}{a}$

in demselben Sinne, wie vorhin (in Beziehung auf das arithm. Verh.) eine Formel, welche die Natur oder das Wesen des geometrischen Verhältnisses anschaulich darstellt. Hiebey ist denn der Quotient $\frac{b}{a}$ oder $\frac{ae}{a}$ nicht einerley mit dem Verhältnisse, sondern er zeigt nur das Verhältniß a : b oder a : ae an.

Wenn daher das erste Glied a, z. B. $= 3$, und der Exponent e, z. B. $= 2$, gegeben sind: so kennt man auch das Hinterglied $ae = 3 . 2 = 6$.

Wenn man ferner in dieser Formel $e = 1$, und in obiger Formel für das arithmetische Verhältniß $d = 0$ setzt: so drücken beyde Formeln das Verhältniß der Gleichheit a:a, oder a — a allgemein aus.

Auch erhellt aus beyden Formeln, daß, wenn man zum Hintergliede des arithmetischen Verhältnisses addirt $\mp d$, im geometrischen Verhältnisse aber das zweyte Glied durch den Exponenten e dividirt, das Vorderglied erzeugt werde. So hat man im vorigen Beyspiele aus $\frac{6}{2}$ das Vorderglied 3, und hiedurch das geometr. Verhältniß 3 : 6. Eben so wenn z. B. 8 das Hinterglied eines arithm. Verhältnisses und $-d = -3$ seyn soll: so ist das Vorderglied $= 8 + 3 = 11$, folglich das Verhältniß 11 — 8 (11 zu 8).

Es ist übrigens von selbst klar, daß die in Verhältniß zu setzenden Größen gleichartig (§. 26.) seyn müssen, weil nur Gleichartiges aus Gleichartigem entspringen kann.

Anmerkung 1. Das geometrische Verhältniß wird nach dem Beyspiele der ältesten griechischen Mathematiker, die wir noch jetzt gewissermaßen als unsere Lehrer verehren, und deren Werke auf uns gekommen sind, namentlich aber nach Euklid's Beyspiele auch Verhältniß schlechthin (ratio simpliciter s. κατ' ἐξοχην) genannt. Die Geometrie, als Theorie und Praxis, sich unstreitig einer höheren Kultur früher, als die Arithmetik, erfreuend, führte nothwendig zu jener Vergleichung, die wir mit dem bestimmten Namen »geometrisches Verhältniß« (»geometrische Proportion«) belegen, nicht anders, als könnten nur ausgedehnte stetige, oder geometrische Größen Glieder dieses Verhältnisses (und dieser Proportion) seyn, wie denn solches ursprünglich (man vergl. Euklid's Elemente 5. Buch und die Anordnung der folgenden Bücher) Statt gefunden haben mag, und nur vorzugsweise Statt findet, gleichwie die Zahlen, als arithmetische Quanta (§. 17.), Glieder des arithmetischen Verhältnisses sind.

Anmerkung 2. Die zur Andeutung der verschiedenen Verhältnisse willkührlich gewählten Zeichen (— und :) vermögen nicht eine Einerleyheit der Vergleichung der Größen im Verhältnisse, d. i. hinsichtlich ihrer Entstehungsweise auseinander, mit den arithmetischen Operationen, Subtraktion und Division, herbeyzuführen, und eben darum auch nicht an und für sich zu entscheiden, welche der verglichenen Größen aus der andern erzeugt gedacht werden müsse. Daher ist es beliebig, das zweyte Glied des Verhältnisses aus dem ersten (wie in diesem Lehrbuche wegen der Gleichförmigkeit in der Behandlung dieser Lehre mit der der Progressionstheorie durchgängig geschieht), oder umgekehrt das erste Glied aus dem zweyten entspringen zu lassen. Diese letztere Betrachtungsweise ist die Euklid'sche und üblichste; ihr gemäß ändern sich die obigen Formeln in diese

$$(a \mp d) - a, \text{ und } ae : a$$

um, und zeigen, wie nun das zweyte Glied auch aus dem ersten entspringe.

§. 100. Nebeneintheilung hinsichtlich des geometrischen Verhältnisses und Erklärungen.

1. Das geometrische Verhältniß der Ungleichheit (§. 98.) heißt das der **größeren**, oder der **kleineren** Ungleichheit, je nachdem der Exponent entweder $\prec$ oder $\succ 1$ ist. So ist das Verhältniß 12:4, wo $\frac{1}{3}$ der Exponent ist, ein Verhältniß der größeren, aber 4:12, wo 3 der Exponent ist, ein Verhältniß der kleineren Ungleichheit. — Nach der vorhin angeführten Euklid'schen Betrachtungsweise hat das Umgekehrte Statt.

2. Von 2 geometrischen Verhältnissen der Ungleichheit, miteinander verglichen, heißt das das **größere** Verhältniß, für welches der **kleinere** Exponent Statt findet. Vergleicht man z. B. die 2 Verhältnisse 8:2 und 12:4 miteinander: so sieht man, daß der Exponent $\frac{2}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ des ersten Verhältnisses ein kleinerer Theil der Einheit ist, als der Exponent $\frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{3}$ des zweyten Verhältnisses, daß folglich jenes größer sey, als das zweyte Verhältniß 12:4. — Nach der Euklid'schen Betrachtungsweise ist unter 2 Verhältnissen das das **größere**, welches den **größeren** Exponenten hat.

So hat, wenn $a \succ b$ ist, a zu derselben (mit a und b gleichartigen) Größe c ein **größeres** Verhältniß, als die kleinere Größe b zu eben jener Größe c; d. i. $a:c \succ b:c$, weil nothwendig $\frac{c}{a} \prec \frac{c}{b}$, oder nach Euklid'scher Betrachtungsart $\frac{a}{c} \succ \frac{b}{c}$ ist.

3. Das geometrische Verhältniß heißt **rational** oder **irrational**, je nachdem dessen Exponent eine **Rational-** oder **Irrationalzahl** (§. 59.) ist. So ist $a:\sqrt{b}$, wo $\frac{\sqrt{b}}{a}$ der Exponenent ist, algebraisch irra-

tional (§. 61. Zuſ. 2.). Setzt man aber z. B. $b = 4$ und a gleich irgend einer Rationalgröße, z. B. $= \frac{1}{3}$: ſo iſt das Verhältniß $\frac{1}{3} : \sqrt{4}$, d. i. $\frac{1}{3} : \pm 2$ arithmetiſch rational; aber $1 : \sqrt{2}$ iſt irrational.

Zuſatz 1. Wenn beyde Glieder des Verhältniſſes arithmetiſch irrational ſind: ſo kann daſſelbe bald rational, bald irrational ſeyn, weil dann bisweilen die Irrationalität des Exponenten verſchwindet. So iſt von $\sqrt{2} : \sqrt{6}$ der Exponent $= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$, d. i. irrational, alſo das Verhältniß ſelbſt irrational. Aber von $\sqrt{3} : \sqrt{12}$ oder, was daſſelbe iſt, von $\sqrt{3} : 2\sqrt{3}$ (§. 6. Zuſ. 2.) iſt der Exponent $= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$, d. i. rational, demnach auch das Verhältniß ſelbſt rational.

Zuſatz 2. Da man ſich dem Werthe einer Wurzel aus einer unvollkommnen Potenz, ſo weit man will, nähern kann (§. 61. Zuſ. 1. vergl. mit §. 69.), oder, mit andern Worten, da ſich jede Irrationalzahl durch eine Rationalzahl ſo genau, als verlangt werden mag, ausdrücken läßt, ſo kann man auch jedes irrationale Verhältniß ſo genau, als man immer will, durch ein rationales ausdrücken. Wir können alſo das geometriſche Verhältniß durchaus als ein rationales betrachten, indem, was von dieſem gilt, auch von jenem gelten muß.

§. 101. Erklärung. Verhältniſſe ſind gleich, wenn ſie gleiche Exponenten (gleiche Differenzen oder gleiche Quotienten) haben. So ſind die arithmetiſchen Verhältniſſe $3-5$; $7-9$; $1-3$, ... wegen derſelben Differenz $= 2$, die, zu jedem erſten Glied addirt, das entſprechende Hinterglied giebt, — und eben ſo die geometriſchen Verhältniſſe $9:3$; $21:7$; $\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$, ... wegen deſſelben Quotienten $= \frac{1}{3}$ gleich.

Zusatz 1. Also sind alle Verhältnisse der Gleichheit (§. 98.) einander gleich.

Zusatz 2. Es drücken demnach a —(a ± d); b —(b ± d); c —(c ± d), . . . gleiche arithmetische, wie a:ae; b:be; c:ce, . . . gleiche geometrische Verhältnisse formularisch aus (§. 99.).

Zusatz 3. Inwiefern man lediglich auf die Gleichheit zweyer oder mehrerer Verhältnisse, oder auf ihre gleichen Exponenten sieht, gelten auch von den Verhältnissen die im §. 24. angeführten Axiome IV. und III., nämlich gleiche Verhältnisse lassen sich für einander substituiren, und Verhältnisse, die einem dritten, oder mehreren gleichen Verhältnissen gleich sind, sind einander selbst gleich.

Zusatz 4. Wenn von zwey gleichen Verhältnissen eines ein Verhältniß der Gleichheit ist: so ist auch das andere ein Verhältniß der Gleichheit, indem für beyde gleiche Verhältnisse einerley Exponent, d. i. entweder dieselbe Differenz = 0, oder derselbe Quotient = 1 (§. 99.) statt finden muß.

§. 102. Erklärung und Eintheilung. Die Gleichheit zweyer Verhältnisse (§. 101.) heißt Proportion, und die Glieder jener Verhältnisse heißen proportionale, oder sich in einer Proportion entsprechende Größen. Diese sind selbst wieder Glieder der Proportion, und zwar nach der Ordnung das erste, zweyte, dritte und vierte Glied. Erstes und viertes Glied heißen die äußersten (termini extremi), und zweytes und drittes Glied heißen die mittleren Glieder (termini medii).

Vermöge der Verschiedenheit der Verhältnisse ist die Proportion entweder eine arithmetische oder eine geometrische.

Jede dieser Proportionen heißt entweder diskret

(eine abgesönderte, discreta), oder stetig (continua), je nachdem die mittleren Glieder verschiedene oder einerley Größen sind. In dem letzten Falle sind alle Glieder der Proportion gleichartige Größen, und, indem man statt der 2 mittleren Glieder nur eines schreibt und ausspricht, nennt man das erste und dritte Glied die äußersten, und das nur einmal gesetzte Glied das mittlere. So ist $7 - 3 = 10 - 6$, oder 4 fl. — 7 fl. = 9 fl. — 12 fl. eine arithmetische diskrete Proportion, wobey das Gleichheitszeichen mit Wie gelesen wird; man spricht nämlich: 7 zu 3, wie 10 zu 6, oder es verhalten sich 4 fl. zu 7 fl., wie 9 fl. zu 12 fl., was denn auch hinsichtlich der geometrischen diskreten Proportion, z. B. $2:6 = 7:21$, gilt. Eben so ist $2 - 5 = 5 - 8$, oder kürzer: 2—5—8 (2 zu 5 zu 8) eine arithmetisch — und $2:4:8$ eine geometrisch — stetige Proportion.

Zusatz 1. Nach §. 101. Zus. 2. ist also

$$a - (a \pm d) = b - (b \pm d)$$

die Formel für die arithmetische diskrete, und

$$a : ae = b : be, \text{ oder } \frac{ae}{a} = \frac{be}{b}$$

die Formel für die geometrische diskrete Proportion, wenn man a zum ersten, und b zum dritten Gliede nimmt.

Diese Formeln zeigen klar, daß es die Natur der Proportionalität der Größen erfodere, daß das vierte Glied gerade so aus dem dritten entspringe, wie das zweyte aus dem ersten. Wenn man daher das erste Glied wieder mit a bezeichnet: so wird man in $a - (a \pm d) = (a \pm d) - x$, und in $a : ae = ae : y$ statt x setzen müssen $(a \pm d) \pm d$, d. i. $a \pm 2d$, und $ae \cdot e$, d. i. ae^2 statt y. Folglich ist, wenn a das erste Glied vorstellt,

$$a - (a \pm d) - (a \pm 2d)$$

die Formel für die arithmetische stetige, und

$$a : ae : ae^2 \text{ oder } \frac{ae}{a} = \frac{ae^2}{ae}$$

die Formel für die geometrische stetige Proportion.

Zusatz 2. Es sind also zwey gleiche Größen a, b mit einer dritten, ihnen gleichartigen, Größe c proportional, oder stehen zu dieser in einerley Verhältniß, wie auch diese zu jenen in einerley Verhältniß steht. Weil nämlich $a = b$, so ist nothwendig die Differenz oder der Quotient in Beziehung auf a zu c gleich der Differenz oder dem Quotienten in Beziehung auf b zu c, d. i. das Verhältniß a zu c ist gleich dem Verhältnisse b zu c. Aber aus demselben Grunde ist auch das Verhältniß c zu a = dem Verhältnisse c zu b.

Zusatz 3. Es folgt, daß auch umgekehrt, wenn eine Größe c sowohl mit a, als mit b in einerley Verhältniß steht, beyde Größen a, b vermöge der Natur des Verhältnisses (§. 99.) nicht nur gleichartig, sondern auch gleich seyen, weil sonst die Exponenten beyder Verhältnisse, diese also selbst nicht gleich seyn könnten.

Zusatz 4. Hinsichtlich der Formeln für die geometrischen Proportionen (Zus. 1.) macht es keinen Unterschied, wenn man 1) setzt

$$\pm a : \pm ae = \pm b : \pm be = \mp b : \mp be.$$

So verhält sich $-2 : -4 = -6 : -12$, oder $2 : 4 = -6 : -12$.

2) Kann man auch setzen:

$$\pm a : \mp ae : \pm ae^2.$$

Gleichwie z. B. $2 : 4 : 8$, oder $-2 : 4 : -8$, eben so ist auch $2 : -4 : 8$ eine wahre geometrische stetige Proportion.

Zusatz 5. Wenn die Glieder eines arithmetischen Verhältnisses benannte Zahlen derselben Art sind: so bekömmt der Exponent oder Unterschied denselben Namen.

Wenn man z. B. hat 5 Jahre zu 3 Jahren: so ist die Differenz = 2 Jahren, und das Hinterglied 3 J. = 5 J. — 2 J., oder = (5—2) J. Daher müssen die Glieder einer arithmetischen Proportion, wenn sie benannte Zahlen seyn sollen, denselben Namen haben; z. B. 5 J. — 3 J. = 9 J. — 7 J.

Nun entsteht aber die unbenannte Zahl 3 aus der unbenannten 5, und eben so 7 aus 9, gerade so, wie die benannte Zahl 3 J. aus der benannten 7 J., und eben so 7 J. aus 9 J., nur mit der, in Ansehung des Verhältnisses, als solchen, unwesentlichen Abweichung, daß dort die Einheit unbenannt, hier benannt ist; folglich wenn obige Proportion wahr ist: so ist auch 3—5 = 9—7, und umgekehrt.

Man mag daher die Glieder der oben sowohl für das arithmetische Verhältniß, als für die arithmetischen Proportionen, entworfenen Formeln benannte oder unbenannte Zahlen bedeuten lassen: so gelten alle Sätze, die wir mit Hilfe jener Formeln für den einen angenommenen Fall als anschaulich gewiß erkennen, auch in dem andern Falle, d. i. allgemein.

Weil z. B. die Formel $a - (a \pm d)$ des arithm. Verh. dadurch, daß man setzt $(a \pm n) - (a \pm d) \pm n$, oder $(a \pm n) - ((a \pm n) \pm d)$ nicht wesentlich verändert wird, indem man auch in letztem Ausdrucke, wo nur $a \pm n$ die Stelle des ersten Gliedes a einnimmt, dieselbe Differenz $= \pm d$ hat: so gilt für jedes arithmetische Verhältniß die Wahrheit, daß es, als Verhältniß, unverändert bleibe, wenn man zu beyden Gliedern dieselbe, ihnen gleichartige, Zahl n addirt, oder von beyden Gliedern abzieht. Dieselbe Wahrheit gilt daher auch allgemein für jede arithmetische Proportion.

Zusatz 6. Wenn a:b ein geometrisches Verhältniß unbenannter Zahlen ist, und man multiplizirt eine Größe

G, als Multiplikand, mit a und b als Multiplikatoren: so wird das Verhältniß aG : bG gleich a:b seyn. Denn setzt man $\frac{b}{a} = m$, so daß also $b = am$, und demnach $bG = aGm$ und $\frac{bG}{aG} = \frac{aGm}{aG} = m$, folglich $\frac{bG}{aG} = \frac{b}{a}$ ist: so hat man die durch diese Quotienten angezeigten gleichen Verhältnisse

$$aG : bG = a : b.$$

Es sey z. B. G = 1 Pfund, so ist das geometrische Verhältniß 2 Pf. : 6 Pf. gleich 2 : 6; oder man hat die Proportion 2 Pf. : 6 Pf. = 2 : 6, oder = 1 : 3, oder = 5 : 15, . . . Hat man daher ferner die geometrische Proportion 2 : 6 = 5 : 15, so wird auch seyn 2 Pf. : 6 Pf. = 5 Pf. : 15 Pf., und umgekehrt.

Es sey endlich G = 1 Arbeiter, und H = 1 Elle, dann 9 Arb. : 3 Arb. = 24 El. : 8 El.: so wird sich, da ist 9 Arb. : 3 Arb. = 9 : 3, und 24 El. : 8 El. = 24 : 8, auch verhalten 9 : 3 = 24 : 8, und umgekehrt: wenn nämlich die letztere Proportion gilt: so wird auch die erste gültig seyn.

Aus dem Gesagten erhellt, daß 1) die Glieder einer geometrischen diskreten Proportion entweder alle, wie in der stetigen Proportion, oder nur die Glieder eines der beyden Verhältnisse gleichartige Größen seyn können; daß 2) alle Sätze, die wir mittels der oben für das geometrische Verhältniß und für die geometrischen Proportionen entworfenen Formeln unter Annahme eines der erwähnten Fälle als anschaulich gewiß erkennen, auch im andern anzunehmenden Falle, d. i. allgemein gültig seyen.

§. 103. Erklärung. Die Folge von Größen, die nach einerley Gesetz entstehen, heißt Reihe (series). Jede Größe der Reihe heißt Glied. In wie-

fern diese Glieder der Reihe nach jenem Gesetze entweder wachsen, oder abnehmen, heißt die Reihe entweder divergent oder convergent. Nach der begrenzten oder unbegrenzten Anzahl der Glieder nennt man die Reihe eine endliche oder unendliche.

§. 104. Erklärung. Eine Reihe, deren Glieder nach dem Gesetze fortlaufen, daß jedes folgende zum unmittelbar vorhergehenden einerley Verhältniß hat, heißt Progression. Nach Verschiedenheit der Verhältnisse ist daher die Progression entweder eine arithmetische oder geometrische, wie die Reihe entweder fallend oder steigend (progressio descendens vel ascendens).

Zusatz 1. Also ist jede stetige Proportion eine Progression von 3 Gliedern; folglich sind die Formeln für jede arithmetische und geometrische Progression, als begrenzte Reihen, wie wir sie hier betrachten, folgende Ausdrücke:

$\gamma)$ $a - a \pm d - a \pm 2d - a \pm 3d \ldots . - a \pm d(n-1)$

$\delta)$ $a : ae : ae^2 : ae^3 \ldots . : ae^{n-1}$

Indem man nämlich auf das Gesetz reflektirt, welchem in γ) die Coeffizienten von d, und in δ) die Exponenten von e folgen, sieht man deutlich ein, daß, wenn n die Anzahl aller Glieder der Reihe bedeutet, die arithmetische Progression durch das allgemein ausgedrückte Glied $a \pm d(n-1) = u$, und die geometrische durch $ae^{n-1} = z$ müsse begrenzt werden.

Eben so erhellt, daß, wenn $+d$ gilt, und e kein ächter Bruch ist, diese Formeln für die steigende, sonst für die fallende Progression gelten; daß ferner, wie bey den stetigen Proportionen, alle Glieder jeder Progression gleichartige Größen seyn müssen.

Zusatz 2. Dividirt man alle Glieder der Progression δ) durch a: so hat man die Progression

$$1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^{n-1};$$

wo die Glieder bloß die natürlichen Potenzen des Exponenten sind. Man sieht, wie man überhaupt jede Progression in eine andere, deren erstes Glied 1 ist, verwandeln könne.

Zusatz 3. Ganz analog mit den Formeln für u und z, d. i. für die letzten Glieder der arithm. und geom. Progression, läßt sich auch jedes rte Glied der arithm. Progression, vom ersten angerechnet, durch die Formel rtes Glied $= a \pm d(r-1)$, und das ebensovielste r'te Glied, vom letzten angerechnet, durch r't. Glied $= a \pm d(n-r')$ ausdrücken. So ist das vorletzte Glied $a \pm d(n-2)$ u. s. w.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, d. i. $n=2p+1$: so hat man ein mittleres Glied $= m$, welches daher das $(p+1)$te Glied ist, folglich ist $m = a \pm dp$, und in diesem Falle $u = a \pm 2dp$.

Zusatz 4. Auf gleiche Weise ist für das rte Glied der geometrischen Progression die Formel ae^{r-1}, und für das r'te Glied $ae^{n-r'}$ gültig; für das mittlere Glied m gilt die Formel ae^p, und für z in diesem Falle ae^{2p}.

§. 105. Uebergang. Bisher haben wir die Verhältnisse, Proportionen und Progressionen im Allgemeinen betrachtet. Ehe wir nun zu der weiteren Theorie und zur Anwendung des Einzelnen fortschreiten, müssen wir hinsichtlich der Beweise der nachfolgenden Lehrsätze eigends noch auf die Beweiskraft (vis argumenti) aufmerksam machen. Die für die genannten Gegenstände entwickelten Formeln stellen die Natur oder das Wesen eben dieser Gegenstände dar, soviele Gattungen der Verhältnisse, Proportionen und Progressionen auch immer stattfinden mögen (vergl. §. 102. Zus. 5. 6.). Was wir daher in jenen Formeln oder mit deren Hilfe als wahr anschauen, ist als aus der Natur des treffenden Gegen-

standes selbst genommen zu betrachten, folglich allgemeingültig. Namentlich führen wir hier noch folgendes allgemeine Moment an:

An der Formel a : ae = b : be schauen wir die Wahrheit an, daß in jeder (wahren) geometrischen Proportion das vierte Glied das Ebensovielfache (nfache oder sub n fache) des dritten Gliedes sey, das Wievielfache (nfache oder sub n fache) das zweyte Glied vom ersten ist, und umgekehrt. So ist z. B. nicht 2 : 6 = 3 : 8 oder = 3 : 10, sondern 2 : 6 = 3 : 9 eine (wahre) geometrische Proportion, weil nur 9 das 3fache von 3, wie 6 das 3fache von 2 ist.

So enthalten vorerst diese Formeln

II) im Besondern

die anschauliche Gewißheit für folgende Lehrsätze:

A. In Ansehung der Proportionen.

§. 106. Lehrsatz. I. In jeder arithmetischen diskreten Proportion ist die Summe der äussersten Glieder gleich der Summe der mittleren Glieder. II. In jeder arithmetischen, stetigen Proportion ist die Summe der äußersten Glieder gleich dem doppelten mittleren Gliede.

Beweis von I. In der Formel $a - (a \pm d) = b - (b \pm d)$ (§. 102.) ist die Summe des ersten und vierten Gliedes $= a + b \pm d$, und die Summe des zweyten und dritten Gliedes $= a \pm d + b$; beyde Summen bestehen aus denselben Summanden, sind also gleich.

Beweis von II. In der Formel $a - (a \pm d) - (a \pm 2d)$ (§. 102.) ist die Summe des ersten und dritten Gliedes $= a + a \pm 2d = 2(a \pm d)$, und das doppelte mittlere Glied $= 2(a \pm d)$, also sind beyde Summen gleich.

Zusatz. Die Gleichheit zweyer Summen läßt sich daher immer in eine arithmetische Proportion verwandeln. Ist z. B. $a+d=b+c$, so hat man, indem man die Summanden umwechselnd (reciproce) proportional setzt, $a-b=c-d$; oder auch $c-a=d-b$, ... So hat man aus $5+4=2+7$ die Proportion $2-4=5-7$, oder $5-2=7-4$, u. s. w.

Wenn ferner die eine der gleichen Summen das Doppelte einer Größe ist, so kann man diese als die mittlere stetige Proportionalgröße zu den Summanden der andern Summe darstellen. Ist nämlich $2b=a+c$, so hat man die stetige Proportion $a-b-c$; so auch statt der Gleichung $2.7=6+8$ die Proportion $8-7-6$.

§. 107. **Aufgabe 1. Zu 3 gegebenen Größen die vierte arithmetisch-proportionale Größe zu finden.**

Auflösung. Wenn man durch a, b, c die gegebenen, und durch x die gesuchte Größe allgemein darstellt, folglich seyn soll $a-b=c-x$: so hat man (vermöge Lehrs. I. §. 106.) $a+x=b+c$, und hieraus (nach §. 75.) $x=b+c-a$; d. i. das gesuchte vierte Glied ist gleich der Differenz zwischen der Summe der mittleren Glieder und dem ersten Gliede. So ist z. B. aus $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{5}-x$ diese Größe $x=(\frac{1}{4}+\frac{2}{5})-\frac{1}{3}=\frac{13}{20}-\frac{1}{3}=\frac{19}{60}$.

Probe oder Prüfung der Rechnung. Wirklich ist, wenn man $\frac{19}{20}$ an die Stelle von x setzt, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{5}-\frac{19}{20}$ eine wahre arithm. Proportion, indem für beyde Verhältnisse dieselbe Differenz $=\frac{13}{20}$ statt findet, [illegible] die Summe der äußersten Glieder gleich ist der [illegible]e der mittleren Glieder.

§. 108. **Aufgabe 2. Zu 2 gegebenen Größen die mittlere arithmetisch-stetige Proportionale, oder, wie man es gewöhnlich ausdrückt,**

zwischen 2 Größen das arithmetische Mittel zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die gegebenen Größen allgemein durch a, b, so daß $a - x - b$ seyn soll: so ist (nach Lehrs. II. §. 106.) $2x = a + b$, und hieraus nach §. 76.) $x = \frac{1}{2}(a + b)$; d. i. das gesuchte arithmetische Mittel ist gleich der halben Summe der gegebenen Größen. So ist z. B. zwischen 7 fl. und 13 fl. das arithmetische Mittel $= \frac{7 + 13}{2} = 10$ fl. In der That verhält sich 7 fl. — 10 fl. = 10 fl. — 13 fl., wie auch ist $7 - 10 - 13$.

Zusatz 1. Zu mehr als 2 gleichartigen Größen findet man in einem ähnlichen Sinne das arithmetische Mittel, wenn man ihre Summe durch ihre Anzahl dividirt. Z. B. von (10, 11, 14, 16) Pfunden ist

$$\frac{10 + 11 + 14 + 16}{4} = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}$$ Pf. das arithm. Mittel.

Zusatz 2. Die angeführten Aufgaben sind, ihrer nützlichen Anwendung wegen, die gewöhnlichen. Man sieht aber leicht ein, daß man auf ähnliche Weise auch jedes andere fehlende Glied der arithmetischen Proportion finde. Es sey z. B. $a - x = c - d$: so hat man $a + d = c + x$, daher $x = a + d - c$; oder wenn ist $a - b - x$: so hat man $a + x = 2b$, daher $x = 2b - a$.

§. 109. Lehrsatz. I. In jeder geometrischen diskreten Proportion ist das Produkt der äußersten Glieder gleich dem Produkte der mittleren Glieder. II. In jeder geometrischen stetigen Proportion ist das Produkt der äußersten Glieder gleich dem Quadrate des mittleren Gliedes.

Beweis von I. In der Formel $a : ae = b : be$ (§. 102.) ist das Produkt der äußersten Glieder $= abe$,

und das Produkt der mittleren = aeb; beyde Produkte bestehen aus denselben Faktoren, sind also gleich.

Der Beweis von II. wird mittels der Formel $a : ae : ae^2$ auf gleiche Weise geführt, indem $a . ae^2$ oder $a^2e^2 = (ae)^2 = a^2e^2$ (§. 53.) ist.

Zusatz 1. Man kann also die Gleichheit zweyer Produkte in eine geometrische (diskrete oder stetige) Proportion umwandeln, wenn man die Faktoren umwechselnd proportional setzt, was man auch so ausdrückt: die Faktoren gleicher Produkte sind reciproce proportional. So verwandelt sich $ad = bc$ in $a : b = c : d$, oder in $b : a = d : c$, ... und $y^2 = a$ in $y : a = 1 : y$, ... Eben so hat man aus $x^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (nach §. 38. Zus. 4.) die stetige Proportion $(a+b) : \pm x : (a-b)$, und aus $6^2 = 4 . 9$ die Proportion $4 : \pm 6 : 9$.

Zusatz 2. Wenn wieder, wie im §. 102. Zus. 6, G und H die Benennungen zweyer Zahlen a, b bedeuten, z. B. G = 1 Thlr. und H = 1 fl., und $aG = bH$ ist: so hat man $a : b = H : G$, oder $H : G = a : b$, d. i. die Zahlen a, b verhalten sich, wie ihre verwechselten Benennungen. Sind z. B. 4 Thlr. = 6 fl., so verhält sich 4 : 6 = Gulden : Thaler, oder es verhält sich Gulden : Thaler = 4 : 6. Wenn ferner z. B. 139 baierische Fuße gleich sind 127 rheinl. Fußen: so verhält sich der baierische Fuß zum rheinländer F. = 127 : 139. Diese Zahlen, wie jene 4 und 6, nennt man Verhältnißzahlen, deren Kenntniß nothwendig ist, um besonders alle Arten von Maßen, Gewichten, ... welche an einem Orte üblich sind, in gleichen Maßen, Gewichten, ... eines andern Ortes anzugeben.

Aufgabe 1. Zu 3 gegebenen Grö-

ßen die vierte geometrisch-proportionale Größe zu finden.

Auflösung. Es seyen allgemein a, b, c, die 3 dieser Ordnung nach gegebenen Größen und x die gesuchte Proportionale, so daß man die Proportion a : b = c : x habe: so ist (vermöge Lehrs. I. §. 109.) ax = bc und hieraus (nach §. 56.) $x = \frac{bc}{a}$; d. i. man erhält das gesuchte vierte Glied, wenn man die 2 mittleren Glieder miteinander multiplizirt, und das gefundene Produkt durch das erste Glied dividirt.

Es seyen z. B. die 3 gegebenen Größen 3 Pfunde, 7 Pfunde, 5 Gulden, so daß also x (Gulden) aus der Proportion

3 Pf. : 7 Pf. = 5 fl. : x

zu finden sey. Da sich nach §. 102. Zus. 6. auch 3 Pf. : 7 Pf. verhalten, wie 3 : 7, also durch Substitution die vorige Proportion in diese

3 : 7 = 5 fl. : x

übergeht: so hat man $x = \frac{7.5 \text{ fl.}}{3} = \frac{35 \text{ fl.}}{3} = 11\frac{2}{3}$ fl.

Probe, oder Prüfung der Richtigkeit der Rechnung. Substituirt man den für x gefundenen Werth, so muß die Proportion:

3 Pf. : 7 Pf. = 5 fl. : $11\frac{2}{3}$ fl.

und demnach (vermöge §. 102. Zus. 6.) auch diese:

3 : 7 = 5 : $11\frac{2}{3}$

eine wahre Proportion seyn. Wirklich ist der Exponent $\frac{7}{3}$ oder $2\frac{1}{3}$ des ersten Verhältnisses gleich dem Exponenten $\frac{11\frac{2}{3}}{5}$ oder $\frac{35}{15}$ des zweyten Verhältnisses, oder das Produkt $3 . 11\frac{2}{3}$ aus den äußersten Gliedern ist gleich dem

Produkte 7.5 aus den mittleren Gliedern, also gelten obige Proportionen, und x ist richtig gefunden.

Zusatz 1. Es erhellt, daß man auf ähnliche Weise jedes andere fehlende Glied der geometrischen Proportion finden könne. Hat man z. B. $a : b = x : c$, so ist, weil $ac = bx$, die gesuchte Größe $x = \frac{ac}{b}$; u. s. w.

Zusatz 2. Da die gegebene Auflösung unter der Voraussetzung, daß die Größen so, wie sie in der Form einer Proportion angesetzt werden, auch wahrhaft proportional seyn, gültig ist: so bleibt sie unverändert dieselbe auch für den Fall, wenn die gleichartigen Größen eines Verhältnisses gegeneinander versetzt werden müssen, um mit den Größen des andern Verhältnisses eine wahre Proportion zu bilden. Wenn nämlich die 4 Größen der Verhältnisse $a : b$ und $c : x$ nur dann eine wahre Proportion bilden, wenn man setzt $b : a = c : x$; so giebt unsere Auflösung das wahre vierte Glied $x = \frac{ac}{b}$.

Man sagt dann: die Größen c, x verhalten sich umgekehrt, wie die Größen a, b, oder jene 4 Größen seyen indirekt proportional. So verhalten sich z. B. die Geschwindigkeiten C, c bey einerley zu durchlaufenden Wege umgekehrt, wie die Zeiten T, t, oder es ist $C : c = t : T$; eben so verhalten sich die Kräfte V, v für einerley Wirkung umgekehrt, wie die Zeiten, d. i. $V : v = t : T$; oder auch die Zeiten verhalten sich umgekehrt, wie die Geschwindigkeiten, oder wie die Kräfte. Setzt daher die größere Kraft $V = 8$ Arbeiter, die kleinere $v = 5$ Arbeiter, die jener Kraft zugehörige Zeit = 3 Tagen, und sucht die der kleineren Kraft zugehörige Zeit, in welcher sie dieselbe Wirkung hervorbringen könne: so weiß man, daß man diese Zeit > 3 Tage finden, daß nämlich 3 T. : x T. = 5 Arb. : 8 Arb.

(= v : V), oder, was daſſelbe iſt, 5 Arb. : 8 Arb. = 3 T. : x T., oder daß man ſetzen müſſe: 8 Arb. : 5 Arb. = x T. : 3 T. Denn nur ſo findet eine (wahre) geometriſche Proportion Statt (§. 105.), und nur unter dieſer Vorausſetzung findet man mittels obiger Auflöſung aus jeder der 3 Proportionen (vergl. Zuſ. 1.) denſelben wahren Werth von $x = \frac{8.3\ T.}{5} = 4\frac{4}{5}$ T., wie auch die Probe (nach §. 100.) zeigt.

Zuſatz 3. Für die Urtheilskraft entſpringt hieraus das leichte Kennzeichen, ob Größen, deren je zwey einerley Benennung haben, in einer geometriſchen Proportion überhaupt ſtehen können, oder nicht; daß nämlich das Erſtere jedesmal der Fall ſey, wenn dem nfachen der Größe der einen Art entweder das Gleichnfache oder Subnfache der Größe der andern Art entſpricht, und zwar daß in dem erſten Falle die 4 Größen direkt, im andern Falle aber indirekt proportional ſeyen.

§. 111. Aufgabe 2. Zu zwey gegebenen Größen die mittlere geometriſch-ſtetige Proportionalgröße zu finden.

Auflöſung. Wenn die gegebenen Größen, welche, wie ſchon oben bemerkt wurde, gleichartig ſeyn müſſen, allgemein durch a, b, und die geſuchte Größe durch x vorgeſtellt werden, ſo daß die Proportion a : x : b gelten ſoll: ſo hat man erſtens (vermöge Lehrſ. II. §. 109.) die Gleichung $ab = x^2$, und hieraus (nach §. 82.) $x = \pm\sqrt{ab}$. Es wird alſo die mittlere geometriſch-ſtetige Proportionale zwiſchen 2 gegebenen Größen gefunden, wenn man aus dem Produkte dieſer Größen die zweyte Wurzel auszieht.

So iſt z. B. zwiſchen 3 und 27 jene Größe $x = \pm\sqrt{3.27} = \pm\sqrt{81} = +9$ oder $= -9$; und eben ſo

findet man zwischen 8 fl. und 18 fl. die gesuchte mittlere Proportionale $x = +12$ oder $= -12$ fl.

Setzt man aber z. B. $a = -2$ und $b = +8$; so würde $x = \pm\sqrt{ab} = \pm\sqrt{-16}$, d. i. imaginär (§. 57. Zus. 2.).

Zusatz. Die angeführte Aufgabe ist die gewöhnliche. Uebrigens erhellt leicht, wie man auch eines der äußersten Glieder einer stetigen Proportion, wenn ein solches fehlt, finden könne. Wenn man nämlich hat $a : b : x$: so ist nach dem angeführten Lehrsatze $ax = b^2$, daher $x = \frac{b^2}{a}$. U. s. w.

Die Prüfung der Rechnung geschieht in diesen Fällen auf ähnliche Weise, wie bey der vorigen Aufgabe (§. 110.).

B. Lehrsätze in Ansehung der gesetzmäßigen Veränderungen und der Zusammensetzung der geometrischen Verhältnisse und Proportionen.

§. 112. Lehrsatz 1. Das geometrische Verhältniß bleibt, als solches, ungeändert, man mag dessen Glieder mit einer und derselben dritten Größe m multipliziren, oder durch eine dritte Größe dividiren.

Beweis. Multiplizirt man die Glieder der Formel $a : ae$ des geometrischen Verhältnisses mit m: so hat das neue Verhältniß $am : aem$ den Exponenten $\frac{aem}{ae} = e$. Dividirt man ferner jene Glieder durch irgend eine Größe m: so hat das entstehende Verhältniß $\frac{a}{m} : \frac{ae}{m}$ den Exponenten $\frac{ae}{m} \times \frac{m}{a}$ (§. 95. d. Ziffernr.) $= e$. Beyde neu

entstandnen Verhältnisse haben also mit a : ae denselben Exponenten e, sind also diesem gleich (§. 101.), oder eines läßt sich für das andere substituiren.

Zusatz 1. Es bleibt daher auch eine geometrische Proportion, als solche, ungeändert, wenn man alle Glieder derselben mit einer beliebigen dritten Größe multiplizirt oder dividirt.

Zusatz 2. Da sich also a:ae verhält, wie am:aem, diese Größen aber die Gleichmfachen von a und ae sind, welche die einfachen heißen: so gilt der Satz: die einfachen Größen verhalten sich zueinander, wie ihre gleichvielfachen, oder umgekehrt.

Zusatz 3. Wenn man ferner a und ae als die Ganzen, und $\frac{a}{m}$ und $\frac{ae}{m}$ als ihre ähnlichen Theile betrachtet: so gilt, da sich a : ae verhält, wie $\frac{a}{m} : \frac{ae}{m}$, der allgemeine Satz: die Ganzen verhalten sich, wie ihre ähnlichen Theile, und zwar entweder wie ihre ähnlichen aliquoten, oder wie ihre ähnlichen aliquanten Theile, je nachdem m ein Maß von a und ae ist, oder kein Maß ist. Dieselben Sätze gelten auch umgekehrt. So verhalten sich z. B. die ähnlichen aliquanten Theile $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, und die ähnlichen aliquoten Theile $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$, d. i. 1 und 2, wie die Ganzen 2 und 4; oder man kann statt des Verhältnisses $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$, oder statt $\frac{2}{2} : \frac{4}{2}$ auch setzen 2 : 4, und umgekehrt.

Zusatz 4. Betrachtet man $\frac{a}{m} : \frac{ae}{m}$ als Verhältniß zweyer Brüche mit einerley Nenner: so drückt man den vorigen allgemeinen Satz auch so aus: Brüche mit einerley Nenner verhalten sich (direkt), wie ihre Zähler.

Dagegen verhalten sich 1) Brüche mit einerley Zähler und verschiedenen Nennern umgekehrt (oder indirekt), wie die Nenner, weil der Exponent des Verhältnisses $\frac{a}{b} : \frac{a}{c}$ nur gleich ist dem Exponenten des Verhältnisses c:b, wie leicht erhellt. So kann man z. B. statt dem Verhältnisse $\frac{2}{3} : \frac{2}{5}$ das Verhältniß 5 : 3 setzen.

Es verhalten sich daher 2) Brüche mit verschiedenen Zählern und Nennern, wie die Produkte aus den Zählern in die verwechselten Nenner. Denn statt des Verhältnisses $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ hat man (durch Reduktion der Brüche auf einerley Nenner) dieses $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$, und statt dessen das Verhältniß ad : bc. So ist z. B. $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = 10 : 12$, oder $= 5 : 6$ (nach Zus. 3.). — Dividirt man die Glieder des Verhältnisses ad : bc, das man statt $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ setzen kann, durch ab: so erhält man das gleiche Verhältniß $\frac{d}{b} : \frac{c}{a}$, d. i. das Verhältniß des Quotienten aus dem Nenner des zweyten Bruches $\left(\frac{c}{d}\right)$, dividirt durch den Nenner des ersten Bruches $\left(\frac{a}{b}\right)$, zu dem Quotienten aus den eben so verwechselten Zählern jener Brüche.

Es ist daher 3) das Verhältniß einer ganzen Zahl zu einem Bruche, z. B. $a : \frac{b}{c}$ gleich dem Verhältnisse des Produktes aus der ganzen Zahl in den Nenner des Bruches zu dessen Zähler, d. i. gleich ac : b, und eben so

hat man statt $\frac{b}{c}$: a das Verhältniß b : ac, wie leicht erhellt.

4) Brüche mit demselben verwechselten Zähler und Nenner verhalten sich direkt, wie die Quadrate der Zähler. Denn wenn allgemein ist $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$: so hat man vermöge 2) das gleiche Verhältniß $a^2 : b^2$.

Es ist also jedes Rationalverhältniß zweyer Brüche, oder einer ganzen Zahl und eines Bruches, gleich einem Rationalverhältnisse ganzer Zahlen.

Zusatz 5. Dividirt man die Glieder der Formel a : ae durch a: so erhält man das gleiche Verhältniß 1 : e; d. i. statt jedem Verhältnisse kann man das Verhältniß der Einheit zum Exponenten jenes Verhältnisses setzen; z. B. statt a : b das Verhältniß 1 : $\frac{b}{a}$.

§. 113. Erklärung. Multiplizirt man die Vorderglieder mehrerer gegebenen Verhältnisse miteinander, und eben so die Hinterglieder: so entsteht ein Verhältniß, welches man das komponirte Verhältniß nennt. Ein solches Verhältniß hat folglich zum Exponenten das Produkt aus den Exponenten aller Verhältnisse, aus welchen es zusammengesetzt wurde.

Sind jene Verhältnisse gleich: so heißt das aus ihnen komponirte Verhältniß nun das multiplizirte, und zwar, das duplizirte, tripl izirte... Verhältniß, je nachdem es aus 2 oder 3 ... gleichen Verhältnissen zusammengesetzt wurde. Jedes dergleichen Verhältnisse, aus welchen das multiplizirte entsteht, heißt das submultiplizirte, und besonders, das subduplizirte, subtripl izirte ... Verhältniß. Sind z. B.

a : b; c : d gleiche Verhältnisse: so ist ac : bd das duplizirte Verhältniß, und a : b, oder c : d ist in Bezug auf jenes das subduplizirte.

Zusatz 1. Wenn in den zu komponirenden Verhältnissen einerley Größen in den nicht untereinander stehenden Gliedern je zweyer Verhältnisse vorkommen: so erhält man das komponirte Verhältniß schneller, indem man jene einerley Größen wegstreicht, und die übrigen in der Ordnung im Verhältnisse ansetzt, in welcher sie stehen bleiben, wie dieses folgende Beyspiele zeigen, in welchen die wegzulassenden Größen unterstrichen sind:

1) $\begin{array}{r} a : \underline{b} \\ \underline{b} : c \\ \hline a : c; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \underline{a} : b \\ c : \underline{a} \\ \hline c : b; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} a : \underline{b} \\ \underline{b} : \underline{c} \\ \underline{c} : d \\ \hline a : d; \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} \underline{a} : b \\ \underline{c} : \underline{a} \\ \underline{d} : \underline{c} \\ \hline d : b. \end{array}$

Denn aus 1) und 2) hätte man das komponirte Verhältniß ab : bc und ac : ab; aber nach §. 112. ist jenes = a : c und dieses = c : b. Auf gleiche Weise kann man die Richtigkeit des Verfahrens in 3) und 4) und überhaupt für jeden ähnlichen Fall darthun.

Zusatz 2. Aber eben darum, weil die Verhältnisse a : b; c : d; f : g gleich seyn sollen, kann man eines für das andere setzen. Man kann daher auch so komponiren:

$$\begin{array}{r} a : b \\ a : b \\ \hline a^2 : b^2 \end{array} \text{ oder } \begin{array}{r} c : d \\ c : d \\ \hline c^2 : d^2 \end{array} \text{ oder } \begin{array}{r} f : g \\ f : g \\ f : g \\ \hline f^3 : g^3 \end{array}$$

d. i. das duplizirte Verhältniß ist das Verhältniß der Quadrate; eben so, das triplizirte Verhältniß ist das Verhältniß der Würfel der Glieder von irgend einem aus jenen gleichen Verhältnissen. Folglich ist auch das submultiplizirte Verhältniß das Ver-

hältniß der Wurzeln. Z. B. der Satz: „die Schwingungsanzahlen N, n zweyer Pendel für einerley Zeit sind im umgekehrten subduplizirten Verhältnisse der Längen L, l der Pendel“ — wird richtig so bezeichnet: $N : n = \sqrt{l} : \sqrt{L}$; und umgekehrt: diese Bezeichnung wird durch jenen Satz ausgedrückt.

Zusatz 3. Hat man z. B. die 3 Verhältnisse a:ae; b : be; c : ce, so ist das triplizirte Verhältniß abc: $abce^3 = 1 : e^3$; oder man kann statt des multiplizirten Verhältnisses überhaupt setzen das Verhältniß der Einheit zum Exponenten eines der gegebenen Verhältnisse, diesen zu derjenigen Potenz erhoben, welche die Anzahl der gegebenen Verhältnisse anzeigt.

Anmerkung. In meinem Programm »Erörterung einiger Hauptmomente in der Lehre von dem geometrischen Verhältnisse im Sinne Euklid's und einiger andern Mathematiker« (Würzb. 1821.) war ich besonders bemüht, das in diesem §. Gesagte zu rechtfertigen und darzuthun, daß dem (geometr.) Verhältnisse keine andere (relative) Quantität zukomme, als die von seinem Exponenten abhängige, daß es daher unrichtig sey und Verwirrung bringend, mit Hausen, Kästner, Hindenburg und Andern, die jenen folgten, zu schreiben z. B. $(1 + e) + (1 + e)$ oder $2(1 : e)$ statt $(1 : e)$ $(1 : e)$ oder $(1 : e)^2$, und eben so z. B. statt $\sqrt{(1 : e)}$ oder $(1 : e)^{\frac{1}{2}}$ zu setzen $\frac{1}{2}(1 : e)$, u. s. w. Späterhin kam ich in den Besitz des schätzbaren Buches »Isaaci Barrow Mathematicae Prof. Lucasiani Lectiones habitae in scholis publicis Academiae Cantabrigiensis« (London 1704.). In diesem Buche erklärt sich Barrow (Newton's Lehrer) vorerst über die Wichtigkeit dieser Lehre vom Verhältnisse, die er »Matheseos velut animam« wie Plato (im Timäus) δεσμον και συνοχιον των μαθηματων (vinculum et commissuram mathematum) nennt, und hinsichtlich welcher Eratosthenes sagt: παντα τα ἐν τοῖς μαθημασιν ἐξ ἀναλογίας ποσῶν τινῶν συγκεισθαι. In der 5. Vorlesung bemüht er sich dann zu beweisen »rationes nul-

lam ex se quantitatem habere, nulla quantitatis attributa sortiri nisi naturalia, quaeque debent accepta referre denominatoribus suis.« In demselben Einklange mit meiner in der angeführten Abhandlung vertheidigten Ansicht sagt Barrow weiter: »Hinc clare facileque decidetur quaestio de rationum, quam adpellat Euclides compositione (συνθεσει), num rectius pro rationum additione sit habenda, vel pro ipsarum multiplicatione: nam e dictis quoad rem ipsam rationibus, utpote quantitatis expertibus, neutrum convenit; quoad vero loquendi modum, quia cum componi dicuntur rationes, ipsarum denominatores multiplicantur, manifestum est, rectius dici rationes multiplicari, quam addi. Sicut et cum denominatorum unus alium dividit, rectius operatio talis dicetur rationis divisio quam subtractio; quamvis obtinuerit, ut illa prior operatio προσθεσις, haec posterior autem ἀφαίρεσις (apud Ptolemaeum et Theonem) dicatur.«

§. 114. Lehrsatz 2. Komponirt man mehrere geometrische Proportionen, oder dividirt man diese durcheinander: so bilden die Produkte, wie die Quotienten, wieder wahre Proportionen.

Beweis.

Es seyen $\left.\begin{matrix} a : aq = b : pq \\ c : cm = d : dm \end{matrix}\right\}$ diese Proportionen,

so sind

$\left.\begin{matrix} ac : acqm = bd : bdqm \\ \frac{a}{c} : \frac{aq}{cm} = \frac{b}{d} : \frac{bq}{dm} \end{matrix}\right\}$ wahre Proport. (§. 102.)

Zusatz 1. Bilden die Wurzeln eine Proportion: so sind auch die Potenzen desselben Grades proportional, und umgekehrt. Ist z. B. $a : b = c : d$, so ist auch $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, indem man jene Proportion einmal mit sich selbst komponirt, und $a^m : b^m = c^m : d^m$, wenn man sich jene $(m-1)$mal mit sich selbst komponirt denkt.

Das Umgekehrte läßt sich allgemein so einsehen: wenn $a^m : b^m = c^m : d^m$, so ist auch $\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{c^m} : \sqrt[n]{d^m}$. Denn es ist $a^m . d^m = b^m . c^m$ (§. 109.); also auch $\sqrt[n]{a^m} . d^m = \sqrt[n]{b^m} . c^m$ (§. 24. Ax. VII. 6)), oder $\sqrt[n]{a^m} . \sqrt[n]{d^m} = \sqrt[n]{b^m} . \sqrt[n]{c^m}$ (§. 54.); daher $\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{c^m} : \sqrt[n]{d^m}$ (§. 109. Zus. 1.).

Zusatz 2. Es erhellt, daß man die komponirte Proportion aus den vorgegebenen Proportionen auf dieselbe leichte und kurze Weise ableiten könne, wie oben im §. 113. Zus. 1. das komponirte Verhältniß, wenn derselbe Fall Statt findet, den wir für die zu komponirenden Verhältnisse angegeben haben. So ist

1) $\dfrac{\begin{matrix} a : b = m : n \\ b : c = n : p \end{matrix}}{a : c = m : p;}$ 2) $\dfrac{\begin{matrix} a : b = m : n \\ b : c = p : m \end{matrix}}{a : c = p : n.}$

Die erste Proportion $a : c = m : p$ ist durch Zusammensetzung ordinatim et ex aequo (wie man es nennt), die zweyte aber perturbatim et ex aequo abgeleitet. Auf gleiche Weise leitet man aus noch mehreren gegebenen Proportionen, z. B. aus $a : b = m : n$; $c : a = n : p$; $d : c = p : q$ und $f : d = q : t$ die komponirte Proportion $f : b = m : t$ ab, welche offenbar gleich ist dieser:

$$acdf : bacd = mnpq : npqt.$$

Wenn man statt $\begin{pmatrix} a : b = m : n \\ a : b = p : q \end{pmatrix}$ setzt $m : n = p : q$, und dieses als ein Zusammensetzen ex aequo simpliciter betrachtet: so sieht man leicht, daß, wenn man eine jener Proportionen umkehrt, man $ab : ab$ oder $1 : 1 = mq : np$, d. i. $mq = np$, folglich $m : n = p : q$ (§. 109. Zus. 1.) wirklich erhalte.

§. 115. Lehrsatz 3. Man kann die Glieder einer geometrischen Proportion auf verschiedene Art versetzen, ohne die Proportion, als solche, zu verletzen.

Wir führen außer den in obigen §§. schon angegebenen Veränderungen, nur noch die bemerkenswerthesten an. Ihre Gültigkeit erhellt dadurch, daß die Verhältnisse jeder neuen Proportion denselben Exponenten haben.

Aus der Proportion

$$a : ae = b : be$$

wird durch	Umkehren	$ae : a = be : b$
— — —	Alterniren	$a : b = ae : be$
— — —	Addiren	$a + ae : ae = b + be : be$
	oder	$a + ae : a = b + be : b$
— — —	Subtrahiren	$a - ae : ae = b - be : be$
	oder	$a - ae : a = b - be : b$
— — —	Convertiren	$a : a + ae = b : b + be$
	oder	$a : a - ae = b : b - be$
— — —	Addir. u. Subtr.	$a + ae : a - ae = b + be : b - be.$

Zusatz. Wenn 2 Proportionen I) gleiche Vorderglieder, oder gleiche Hinterglieder haben: so sind im ersten Falle die Hinterglieder, und im andern Falle die Vorderglieder einander direkt proportional. So ist

1)
$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : e = c : f \\ \hline b : e = d : f; \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ e : b = f : d \\ \hline a : e = c : f. \end{array}$$

Denn man erhält die 3te Proportion in 1), indem man die erste umkehrt und dann komponirt; eben so erhält man die 3te Proportion in 2), wenn man die 2te gegebene umkehrt und mit der ersten komponirt (§. 114. Zus. 2.).

Sind II) in 2 Proportionen die äußersten oder die mittleren Glieder gleich: so sind im ersten Falle die mitt-

leren, und im andern Falle die äußersten Glieder einander indirekt proportional, was auf gleiche Weise, wie das unter I) bewiesen wird. So ist

1) $\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : e = f : d \\ \hline b : e = f : c : \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} a : b = c : d \\ e : b = c : f \\ \hline a : e = f : d. \end{array}$

§. 116. Lehrsatz 4. Bey mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede, oder wie die Einheit zum Exponenten eines der Verhältnisse.

Es seyen die Verhältnisse a:ae; b:be; c:ce etc.: so ist $a \pm b \pm c : ae \pm be \pm ce = a : ae$, oder $= be : be$ etc. oder $= 1 : e$ (§. 94. Zus. 4.).

Anwendung der Proportionen.

1. Der arithmetischen.

§. 117. Nebst der nicht selten vorkommenden Aufgabe „das arithmetische Mittel zwischen gegebenen Größen zu finden“ (§. 108. mit Zus. 1.), bietet besonders die Zeitrechnung mehrere Fälle dar, in welchen man zur Auffindung einer gesuchten Größe die arithmetische Proportion anwenden muß, inwiefern nämlich, wie es die Natur dieser Proportion (§. 102.) fodert, die gegebenen Größen und die gesuchte Größe gleichartig sind, und lediglich die Differenz zwischen je zweyen zu berücksichtigen ist, als worüber die Urtheilskraft entscheidet.

Hinsichtlich dieser Anwendung nur einige Beyspiele! (Vergl. meine Ziffernr. v. S. 171.—183.).

Beyspiel 1. Das 1. Jahr der Hegira fällt mit

dem Jahre 622 der christlichen Zeitrechnung zusammen, indem die Türken vom 16. Julius dieses Jahres, als dem Tage der Flucht Mahomed's, ihre Zeitrechnung anfiengen. Will man daher finden, welches Jahr die Türken in unserem Jahre 1825 schreiben: so setzt man die Proportion 622 — 1825 = 1 — x, woraus x (nach §. 107.) = 1204 gefunden wird. Jene Proportion ist nur gültig, inwiefern 1 und x mit den 2 ersten Gliedern gleichartig sind, also ebenfalls die Bedeutung von Sonnenjahren haben. Da aber die Jahre der Hegira Mondjahre sind, deren 33 erst 32 Sonnenjahre machen: so muß man noch die geometrische Proportion setzen: 32 : 1204 = 33 : x (Mondjahre), woraus man x = 1241 findet. Es fällt also in das Jahr 1825 der christl. Zeitr. das Ende des 1240. und der Anfang des 1241. Jahres der Hegira.

Da ferner das erste Jahr der christlichen Zeitrechnung mit dem 777sten J. der Olympiaden (eines Zeitraumes von 4 Jahren), und mit dem 754ten J. nach Erbauung Rom's (v. Chr.) zusammenfällt: so findet man auf ganz gleiche Weise, wie vorhin, durch die Proportionen:

$$1 - 1825 = 777 - x$$

$$1 - 1825 = 754 - x,$$

daß das J. 1825 unserer Aere das 2601te J. der Olympiaden, oder das 1ste J. der $\frac{2601}{4}$ten, d. i. der 651sten Olympiade, aber das 2578te Jahr V. C. sey. — Eben so verfährt man bey den umgekehrten Aufgaben. Z. B. Konstantin wurde im 1059ten J. V. C. zum römischen Kayser gewählt: das wievielste Jahr der christlichen Zeitrechnung ist dieses? Man setze:

$$754 - 1059 = 1 - x,$$

so findet man das entsprechende 306te J. a Chr. N.

Beyspiel 2. Kajus verheyrathet sich in einem Alter von 27 J. 6 Mon. 8 T.; seine Frau ist 21 J. 9 M. 24 T. alt: wie alt ist er zur Zeit, wo diese in einem Alter von 48 J. 4 M. 7 T. stirbt?

Aus der Proportion:

21 J. 9 M. 24 T. — 48 J. 4 M. 7 T. = 27 J. 6 M. 8 T. — x findet man x $\begin{cases} = 75 \text{ J. } 10 \text{ M. } 15 \text{ T.} \\ - 21 \text{ . } 9 \text{ . } 24 \text{ . } \end{cases}$ = 54 J. 0 M. 21 T.

2. Anwendung der geometrischen Proportionen.

a. Einfache goldne Regel.

§. 118. Ob überhaupt eine vorgelegte Frage mit Hilfe einer geometrischen Proportion zu beantworten sey, ob ferner die gegebenen Größen der einen Art den Größen der andern Art direkt proportional, — wie im Allgemeinen Ursache (Kraft) und Wirkung, und im Besondern wie Arbeiter und Arbeit; Geschwindigkeit und durchlaufener Raum; Waare und Preis; Arbeit und nöthige Zeit; Kapital und Zins; benannte Zahl höherer Art und niederer Art, u. dgl. — oder umgekehrt (indirekt) proportional seyen, wie Kraft (Arbeiter, Geschwindigkeit, Kapital) und Zeit; Breite des Zeuges und nöthige Ellenzahl, u. dgl. — dieses entscheidet leicht die Urtheilskraft nach dem oben im §. 110. Zus. 3. Angeführten.

Hinsichtlich des Ansatzes unter der Voraussetzung, daß man die zu suchende Größe x allzeit zum vierten Gliede der Proportion macht, ist noch zu bemerken: Wenn 1) die Größen direkt proportional sind, so wird die Größe, in Ansehung welcher etwas gefragt wird, das zweyte, und die ihr gleichartige Größe das erste Glied, so daß dann das erste Glied dem dritten, und das zweyte Glied dem vierten (x) in der Proportion entspricht.

Beyspiel 1. Wenn $\frac{3}{4}$ Pfunde 6 Gulden kosten, wieviel kosten $\frac{5}{4}$ Pfunde derselben Waare? — Man setze:

$$\frac{3}{4}\text{ ℔} : \frac{5}{4}\text{ ℔} = 6\text{ fl.} : x\text{ fl.}$$

Da sich diese Größen wie die angegebenen unbenannten Zahlen (§. 102. Zus. 6) verhalten; weil ferner $\frac{3}{4} : \frac{5}{4}$ ist, wie 3 : 5 (§. 112. Zus. 4.): so ist es eben soviel, als man suchte x aus der Proportion 3 : 5 = 6 : x, oder (durch Alterniren §. 115.) aus 3 : 6 = 5 : x, oder (nach §. 112.) aus 1 : 2 = 5 : x, woraus denn x (nach §. 110.) = 10 (fl.) gefunden wird. Das Beyspiel zeigt zugleich, daß man 1. und 2., dann 1. und 3. Glied der Proportion mit Hilfe des gemeinschaftlichen (größten) Maßes abkürzen dürfe.

Die im §. 100. ausgesprochene Vorschrift, das vierte Glied einer Proportion zu finden, hat man Regel detri (regula de tribus), auch direkte goldne Regel genannt wegen ihrer vielfältigen und sehr nützlichen Anwendung.

Wenn aber 2) die Größen indirekt proportional sind: so wird die Größe, in Ansehung welcher etwas gefragt wird, das erste und die gleichnamige Größe das zweyte Glied, so daß nun das erste Glied dem vierten, und das zweyte dem dritten in der Proportion entspricht.

Beyspiel 2. Wenn 700 Mann auf 5 Monate Proviant haben: wieviel Mann müssen abgehen, wenn man mit demselben Proviant 7 Monate lang auskommen will? Man sucht hier vorerst, wieviel Mann 7 Monate damit erhalten werden können. Weil nun einer nmal größeren verzehrenden Kraft eine nmal kleinere Zeit entspricht: so setze man

7 Mon. : 5 Mon. = 700 Mann : x (Mann),

denn nur so hat man nach §. 110. Zus. 2. eine wahre Proportion, aus welcher man denn, wie vorhin, x =

$\frac{5.700 \text{ Mann}}{7}$ = 500 Mann gerade so findet, als wenn man erst durch Abkürzung die Proportion 1 : 5 = 100 : x gesetzt hätte. Es müssen also 200 Mann abgehen.

Die Vorschrift, derley Fragen durch Auffindung der 4ten unbekannten Größe zu beantworten, nannte man die indirekte oder umgekehrte goldne Regel, indem das Verhältniß 7 Mon. : 5 Mon. als umgekehrtes von dem Verhältnisse 5 Mon. : 7 Mon. erscheint, welches man hätte setzen müssen, wenn diese Größen den 2 andern gleichartigen direkt proportional gewesen wären.

Drückt die Frage ein oder mehrere Stücke in Zahlen höherer und niederer Art (z. B. in Pfunden und Lothen; Gulden und Kreuzern; Tagen, Stunden und Minuten . . .) aus: so fodert meistens die Sicherheit und Einfachheit der Rechnung, daß man entweder resolvire, d. i. die Zahlen höherer Art in gleichen Zahlen der genannten niedrigsten Art ausdrücke, oder reduzire, d. i. die Zahlen niederer Art in gleiche der genannten höheren Art verwandle. So sind z. B. 3 fl. und 24 kr. entweder (3.60+24) kr. durch Resolvirung, oder $(3+\frac{24}{60})$ fl., d. i. $3\frac{2}{5}$, oder $\frac{17}{5}$ fl. durch Reduktion. Ausführlich geschehen übrigens diese Verwandlungen entweder nach der angeführten direkten goldnen Regel, oder nach der unten noch vorkommenden Kettenregel.

b. Zusammengesetzte goldne Regel.

§. 119. Die Vorschrift, eine vorgelegte Frage durch mehrmalige Anwendung der goldnen Regel zu beantworten, hat man die zusammengesetzte goldne Regel (regula aurea multiplex); und daher die goldne Regel selbst die einfache genannt. Jene heißt ins Besondere auch Regula quinque, septem, novem, . . . je nachdem durch die Frage 5, 7, 9, . . . Stücke gegeben sind, und ein 6., 8., 10., . . . Stück gefunden werden soll.

Die zusammengesetzte goldne Regel lehrt nämlich zunächst, der verwickelteren Frage gemäß mittels der einfachen goldnen Regel, mehrere wahre Proportionen zu bilden, die so gebildeten Proportionen zu einer einzigen zusammenzusetzen (zu komponiren) und aus dieser die fragliche oder unbekannte Größe zu finden. Vielleicht ergeben sich dann noch Abkürzungen des Verfahrens.

Wir wollen das Gesagte an der Entwickelung der sogenannten Formel für Kraft und Wirkung erörtern:

Einer nmal größeren Kraft entspricht eine nmal größere Wirkung; es ist also

1) $v : v' = e : x'$,

wenn e, x' die den Kräften v, v' entsprechenden Wirkungen bezeichnen. Allein die Wirksamkeit einer Kraft hängt zugleich von der Zeit ab, binnen welcher sie wirkt, so daß von 2, übrigens gleichen, Kräften diejenige eine nmal größere Wirkung hervorbringt, welche eine nmal längere Zeit hindurch wirkt. Gleichwie also die vorige Proportion nur unter der Voraussetzung derselben Zeit t oder der gleichen Zeiten ($t = t'$) eine wahre Proportion ist: eben so ist auch diese

2) $t : t' = x' : x''$

nur eine wahre, inwiefern das Wirken derselben Kraft $v'(=v)$, welche in derselben Zeit t die Wirkung x' hervorbrachte, vorausgesetzt wird. Dann nämlich bezeichnet x'' die der Zeit t', welche nun von t verschieden gedacht wird, entsprechende Wirkung, welche von der der Kraft v gleichen Kraft v' hervorgebracht wird. Auch wird hiebey, wie bey der obigen ersten Proportion, dieselbe Zwischenzeit i vorausgesetzt und dasselbe Hinderniß h, oder es werden gleiche Zwischenzeiten ($i = i'$, z. B. Stunden, wenn t, t', z. B. Tage bezeichnen) und gleiche Hindernisse ($h = h'$) angenommen.

Wenn man daher auch diese Zwischenzeiten als verschieden annimmt, demnach fragt, welche Wirkung x''', hervorgebracht in der Zwischenzeit i', der Wirkung x'' entspreche, welche von derselben Kraft v' in derselben Zeit t', in derselben Zwischenzeit $i (= i')$ und bey demselben Hindernisse $h (= h')$ hervorgebracht wurde: so hat man nach derselben direkten goldnen Regel, wie vorhin, die dritte wahre Proportion:

3) $i : i' = x'' : x'''$.

Nimmt man endlich auch die Hindernisse als verschieden oder ungleich an, und setzt alles Uebrige (Kräfte, Zeiten, Zwischenzeiten) gleich: so hat man, da unter der letzten Voraussetzung dem nmal größeren Hindernisse eine nmal kleinere Wirkung entspricht, nach der indirekten goldnen Regel die Proportion:

4) $h' : h = x''' : e'$,

indem nämlich x''' die bey demselben Hindernisse h hervorgebrachte Wirkung bezeichnet.

Komponirt man nun diese 4, mittels der einfachen goldnen Regel richtig gebildeten, Proportionen nach §. 114. Zus. 2.: so hat man die zu entwickelnde Formel:

$$vtih' : v't'i'h = e : e'.$$

Gleichwie diese Formel (zur Regula novem gehörig) kürzer wird, wenn die vorgelegte Frage keiner Zwischenzeit und keines Hindernisses erwähnt, oder $i = i'$ und $h = h'$ voraussetzt; eben so kann die Formel, wie man leicht sieht, erweitert werden, wenn die Frage noch kleinere ungleiche Zwischenzeiten k, k' (z. B. nebst Monaten und Tagen auch Stunden), oder mehrere ungleiche Hindernisse angiebt.

Beyspiel 1. Wenn 8 Menschen in 6 Tagen, indem sie jeden Tag 12 Stunden arbeiten, 240 Ellen $1\frac{1}{4}$ breites Tuch verfertigen; wieviel Ellen $\frac{5}{4}$ breiten Zeuges

werden 5 Menschen machen, wenn sie 4 Tage und täglich 14 Stunden arbeiten?

Hier ist die verschiedene Tuchbreite Hinderniß der Kraft. Wenn wir daher mit v, t, i die in der Bedingung angegebenen Größen bezeichnen: so hat man, da das erste Glied der Proportion dem dritten, und das zweyte dem vierten entspricht, die Proportion:

$$8.6.12.\tfrac{5}{4} : 5.4.14.\tfrac{11}{4} = 240 : e' (= x),$$

woraus $x = \dfrac{240.5.4.14.\frac{11}{4}}{8.6.12.\frac{5}{4}} = 256\frac{2}{3}$ Ellen gefunden wird.

Beyspiel 2. Wenn zur Deckung eines Daches von 40 Fuß Länge und 15 Fuß Breite 2000 Ziegel, deren jeder 9 Zoll lang und 5 Zoll breit ist, erfordert werden: wieviel Ziegel bey 10 Zoll Länge und 6 Zoll Breite wird man brauchen zur Deckung eines Daches, das 60 Fuß lang und 18 Fuß breit ist?

Hier tritt an die Stelle der durch t und i bedingten Kraft die durch Länge und Breite bestimmte Größe des Daches als Ursache der nmal größeren oder geringeren Anzahl von Ziegeln, und die Länge und Breite der einzelnen Ziegel erscheint als Hinderniß, indem bey derselben Größe des Daches eine größere Anzahl von Ziegeln erforderlich ist, je kürzer und schmäler diese sind. Man hat also, wie vorhin, die Proportion:

$$40.15.10.6 : 60.18.9.5 = 2000 : e' (= x),$$

woraus man $x = \dfrac{2000.60.18.9.5}{40.15.10.6} = 2700$ Ziegel findet.

Beyspiel 3. (Bedingungssatz). Wenn 20 Arbeiter, welche täglich $8\frac{1}{2}$ Stunde arbeiten, in 4 Wochen einen Damm von 300 Fuß Länge fertig bringen: (Fragesatz) wieviel Stunden müssen 16 Menschen täglich arbeiten, um einen Damm von 400 Fuß Länge in $4\frac{4}{7}$ Wochen zu machen?

Setzt man, es werde hier die Zwischenzeit i' gesucht, so hat man durch Substitution in obiger Formel die Proportion:

$$20 . 4 . 8\tfrac{1}{2} : 16 . 4\tfrac{4}{9} . x = 300 : 400,$$

und hieraus (nach §. 110. Zus. 1.) $x = \frac{20 . 4 . 8\frac{1}{2} . 400}{16 . 4\frac{4}{9} . 300}$

$= 12\frac{3}{4}$ St.

Praktischer Vortheil. In jedem dieser 3 Beyspiele erleichtert man sich die Berechnung des x aus dem Bruche 1) dadurch, daß man jeden Faktor des Zählers gegen einen gleichen Faktor im Nenner wegstreicht (wie $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ ist), oder eben diese Faktoren, wenn sie eine dritte Zahl zum gemeinschaftlichen Maße haben, durch eben diese abkürzt (wie $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ist). Wenn 2) ein ächter Bruch, als Faktor, vorkömmt, z. B. im Zähler: so behält man bloß dessen Zähler da bey, wo der Bruch als Faktor steht, dessen Nenner aber setzt man auf die entgegengesetzte Seite. So wenn man hat $\frac{c}{m}$, so ist dieses $= \frac{ab}{c} : m = \frac{ab}{cm}$. Eben so ist $\frac{a}{\frac{b}{c} . m} = a : \frac{bm}{c}$

$= a . \frac{c}{bm} = \frac{ac}{bm}$. Wenn folglich ein Bruch, der als Faktor im Zähler vorkömmt (wie $\frac{11}{4}$ in unserem Beysp. 1.), denselben Nenner eines andern Bruches hat, der im Nenner des Ausdruckes von x vorkömmt (wie $\frac{5}{4}$ in jenem Beysp.): so läßt man ihn geradehin in beyden Brüchen weg (nach 1)), lediglich die Zähler (11 und 5) beybehaltend. Sind ferner, wie in unserem letzten Beyspiele, diese Faktoren ($8\frac{1}{2}$, $4\frac{4}{9}$) gemischte Zahlen: so

bringt man diese auf unächte Brüche ($\frac{17}{2}$, $\frac{40}{9}$), und versetzt nach 2) ihre Nenner.

α) Reesische Regel.

§. 120. Folgerung 1. Wenn man in jedem unserer obigen Beyspiele in dem für x entwickelten Ausdrucke den horizontalen Strich in einen vertikalen umändert, und diesem am obersten Platze links die mit x bezeichnete gesuchte Größe beyschreibt: so hat man

	x	240
1)	8	5
	6	4
	12	14
	$\frac{5}{4}$	$1\frac{1}{4}$

	x	2000
2)	40	60
	15	18
	10	9
	6	5

	x	$8\frac{1}{2}$
3)	16	20
	$4\frac{4}{9}$	4
	300	400,

und man weiß, daß x richtig gefunden werde, wenn das Produkt aus den rechts (in der Multiplikationscolumne) stehenden Zahlen durch das Produkt aus den links (in der Divisionscolumne, wie man es nennt) stehenden Zahlen dividirt wird, nachdem man sich des nur so erwähnten praktischen Vortheiles vorerst bedient hat.

Da man aber die durch eine vorgelegte Frage gegebenen Größen nicht willkührlich in beyden Columnen (rechts und links des vertikalen Striches) ansetzen darf: so ist eine Vorschrift nothwendig, wie diese Vertheilung, unabhängig von einer Formel und ohne vorhergehende Bildung mehrerer Proportionen, geschehen müsse, um durch Division die gesuchte Größe richtig zu finden.

Wir stellen diese Vorschrift (von ihrem angeblichen Erfinder, Herrn von Rees, einem Holländer, Reesische Regel genannt.) so dar:

Man setze die gesuchte, mit x bezeichnete Größe am obersten Platze links des Vertikalstriches und ihr gegenüber rechts die gegebene mit x gleichartige Größe, und vergleiche dann jede im Fragesatze der Aufgabe vorkom-

mende Größe mit diesem x, durch Urtheilskraft bestimmend, ob der nfachen Vermehrung der verglichenen Größe (alles Uebrige gleich gesetzt) entweder eine nfache Vermehrung, oder eine nfache Verminderung des x entspreche; im ersten Falle setze man die betrachtete Größe in die Multiplikationscolumne (rechts), im zweyten Falle in die Divisionscolumne (links), die mit ihr gleichartige Größe aber aus dem Bedingungssatze auf die entgegengesetzte Seite.

Weil z. B. im Beyspiele 3. der nfachen Vermehrung der (16) Arbeiter (im Fragesatze) eine nfache Verminderung der fraglichen Stundenanzahl entspricht: so muß die Zahl 16 links, die ihr gleichartige 20 (Arbeiter) rechts stehen. Dasselbe ist der Fall mit der Größe $4\frac{4}{9}$ Wochen aus dem Fragesatze. Weil aber (caeteris paribus) einer größeren Arbeit eine größere Stundenzahl (= x) entspricht: so kömmt 400 (Fuß Länge) rechts, und die gleichartige Zahl 300 aus dem Bedingungssatze links zu stehen. Gleiche Uebung in Anwendung der gegebenen Vorschrift bieten die 2 andern angeführten Beyspiele dar.

β) Kettenregel.

§. 121. Folgerung 2. Die Vorschrift, wie eine vorgelegte Frage, die verlangt, eine gegebene Größe gewisser Art durch eine gleiche anderer und entfernterer Art auszudrücken, dadurch beantwortet werde, daß man solche (durch die Frage entweder schon gegebene oder ihr gemäß leicht auszumittelnde) Größen richtig untereinander verbindet, deren jede mit der zunächst vorhergehenden gleichartig und zugleich der unmittelbar folgenden Größe anderer Art gleich, die letzte aber gleichartig ist mit der gesuchten Größe, — hat den Namen der Kettenregel erhalten; denn die genannte Gleichartigkeit und Gleichheit gestattet in der Reihe der auszu-

wählenden oder anzusetzenden Größe keinen Sprung oder keine Lücke, so daß folglich diese Größen wie die Glieder einer Kette zusammenhängen.

Diese kurze Vorschrift ist: man setze die gegebene Größe A, welche durch eine ihr gleiche = x ausgedrückt werden soll, rechts eines Vertikalstriches (oder auf die Multiplikationscolumne), und ihr gegenüber links die gesuchte Größe x. Dann setze man ebenfalls links eine mit A gleichartige und der ihr gegenüber rechts zu setzenden Größe anderer Art gleiche Größe, u. s. f. bis die nach demselben Gesetze zuletzt rechts angesetzte Größe mit x gleichartig ist. Hinsichtlich der Berechnung des Werthes von x verfährt man, wie bey der Reesischen Regel.

Beyspiel 1. Man will 1000 Rthlr. in Fried.d'or nach Holland übermachen: wieviel macht dieß dort in holländ. Dukaten, wenn der Cours gegen Gold 135 Prozent (d. i. 135 Rthlr. in Gold sind 100 Rthlr. holl. Courant), und 1 Duk. = 5 fl. 4 Stüver; 1 fl. = 20 Stüver und $2\frac{1}{2}$ fl. = 1 Rthlr. holl. Cour. ist?

Der Ansatz nach obiger Regel ist:

x Duk.	1000 Thl. in Frd.		x	1000
135 Thl. in Frd.	100 Thlr. holl. Cour.		27	100
2 Thl. h. C.	5 fl. holl. C.	oder	1	10
1 fl. h. C.	20 Stüv. h. C.		104	1
104 Stüv. h. C.	1 Duk.		2808x	1000000

woraus $x = \frac{1000000}{2808} = 356\frac{44}{351}$ Duk. gefunden wird.

Beyspiel 2. Man verlangt zu wissen, wieviel rheinländische Morgen 20 baierische Tagwerke machen. Die nöthigen Verhältnißzahlen sind 1): 1 baier. Tagw. = 400 Quadratruthen; 1 Ruthe (Längenmaß) = 10 baier. Fußen; 1 baier F. = 127 par. Linien. — 2) 1 rheinl. Morgen = 120 Quadratruthen; 1 Ruthe (Längenmaß) = 12 rh. F.; 1 rh. F. = 139 par. Linien.

Ansatz nach der Kettenregel:

x rh. Morg.	20 baier. Tagw.
1 b. Tagw.	400 Q.r.
1 Quadratr.	10^2 Q.f.
1 Quadratf.	127^2 par. Lin.
139^2 par. L.	1 rh. F.
12^2 rh. Q.f.	1 rh. Q.r.
120 rh. Q.r.	1 rh. Morg.

Wie hier die Verhältnißzahlen quadrirt wurden, so müssen sie, wenn vom Körpermaße die Rede ist, cubirt werden.

Die Kettenregel, welche, wie schon diese wenigen Beyspiele zeigen, sehr nützlich und leicht angewendet wird bey aller Vergleichung der verschiedenen Gewichte, Maße, Münzen und bey allen zusammengesetzteren Resolvirungs- und Reduktionsrechnungen, ist übrigens nur eine Abkürzung des Verfahrens, aus mehreren erst zu bildenden Proportionen eine einzige zusammenzusetzen, und aus dieser die gesuchte Größe x zu finden. So konnte man in unserem ersten Beyspiele auch so verfahreu:

135 : 100 = 1000 Thl. in Fr.d'or : z Thl. h. C.
2 : 5 = z Thl. h. Courant : w fl. h. C.
1 : 20 = w fl. h. Courant : y Stüv. h. C.
104 : 1 = y Stüv. h. C. : x Duk.

$$135 . 2 . 1 . 104 : 100 . 5 . 20 . 1 = 1000 : x,$$

woraus $x = \frac{1000 . 100 . 5 . 20}{135 . 2 . 104}$ Duk., wie oben, gefunden wird.

c. Theilregel.

§. 122. Die Vorschrift, ein gegebenes Ganzes = S in ungleiche Theile x, y, z, . . . nach gegebenen Verhältnißzahlen a, b, c, . . . d. i. so zu vertheilen, daß sich a : x = b : y = c : z . . . verhält, nennt man Theil- oder Repartitionsregel.

Nach §. 116. ist $a + b + c + \ldots : x + y + z + \ldots = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z \\ \ldots \end{cases}$ Bezeichnet man also die Summe der Verhältnißzahlen mit S′ und setzt S statt $x + y + z + \ldots$, indem die Summe dieser Theile gleich seyn muß dem zu vertheilenden Ganzen: so ist $x = \frac{S}{S'} . a$; $y = \frac{S}{S'} . b$; $z = \frac{S}{S'} . c, \ldots$

Wenn die Verhältnißzahlen, wie sie angegeben werden, noch einen Faktor m gemein haben, so daß $a = dm$, $b = em$, $c = fm, \ldots$ daher $(d + e + f + \ldots)m = S''.m$ ist: so ist auch $x = \frac{S}{S''} . d$, u. s. w.

Hiernach spricht sich die Theilregel gleichsam von selbst so aus: man dividire das zu vertheilende Ganze durch die Summe der (gegebenen oder abgekürzten) Verhältnißzahlen, und multiplizire diesen beständigen Quotienten mit jeder einzelnen (gegebenen oder abgekürzten) Verhältnißzahl: so hat man an diesem Produkte den gesuchten entsprechenden Theil.

Die Theilregel hat besondere Namen erhalten:

1) Gesellschafts- oder Societätsregel.

Beyspiel 1. Es sollen 2475 fl. unter vier alte Personen nach dem Verhältnisse ihres Alters vertheilt werden. A zählt 92, B 96, C 100, D 108 Jahre.

Die durch 4 abgekürzten Verhältnißzahlen sind 23, 24, 25, 27, ihre Summe $= 99$, und $\frac{S}{S''} = \frac{2475}{99} = 25$; daher der Antheil des $A = 25.23 = 575$ fl.; der Antheil des $B = 25.24 = 600$ fl.; der Antheil des $C =$

25. 25 = 625 fl., und der Antheil des D = 25. 27 = 675 fl.

Probe. Die Summe dieser 4 Theile ist gleich dem vertheilten Ganzen.

Beyspiel 2. Es soll eine Brandcollekte von 440 fl. unter 3 Verunglückte nach dem Verluste ihres Vermögens vertheilt werden. A verlor sein ganzes Vermögen, B die Hälfte, C das Drittel.

Die Verhältnißzahlen sind 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, oder $\frac{6}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, wofür man nach §. 112. Zus. 4. die ganzen Zahlen 6, 3, 2 setzen kann. Daher ist $\frac{S}{S''} = \frac{440}{11} = 40$. A erhält folglich 40. 6 = 240 fl., B 120, C 80 fl.

Beyspiel 3. Zum Einkaufe einer Waare giebt A 400 fl. auf 3 und B 250 fl. auf 2 Jahre: wie muß der Gewinn (oder Verlust) à 320. fl vertheilt werden?

Da es keinen Unterschied macht, zu sagen: A giebt 400. 3, d. i. 1200, und B 250. 2, d. i. 500 auf 1 Jahr: so ist hier die Summe der abgekürzten Verhältnißzahlen = 17. Daher ist der Theil für $A = \frac{320.\ 12}{17} = 225\frac{15}{17}$ und für $B = 94\frac{2}{17}$ fl.

Das Produkt aus mehreren Verhältnißzahlen nennt man auch den zusammengesetzten oder mittleren Repartitionsfuß, und die Regel selbst die zusammengesetzte Societätsregel.

2) Vermischungsregel.

Beyspiel. Wenn bey Verfertigung guten Schießpulvers auf 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel gerechnet werden: wieviel von jeder Art gehören zu 100 Pfund Schießpulver?

Auch hier ist eine Societät der genannten 3 Materien, die sich nach den gegebenen Verhältnißzahlen 16,

3, 2 in die geforderte 100 ℔ theilen sollen. Man braucht daher 1) $\frac{100}{21} . 16 = 76\frac{4}{21}$ ℔ Salpeter; 2) $\frac{100}{21} . 3 = 14\frac{6}{21}$ ℔ Kohlen, und 3) $\frac{100}{21} . 2 = 9\frac{1}{21}$ ℔ Schwefel. Die Summe dieser ℔ ist wieder = 100.

Anmerkung. Man verwechsle diese Regel nicht mit der sogenannten Alligationsregel; die zu dieser gehörigen Aufgaben löst man am leichtesten mit Hilfe der Analysis. Beyspiele kamen oben in den §§. 89. 93. 97. vor.

3) Falcidienregel.

Diese Regel betrifft den Fall, wo der Haupterbe für sich den 4ten Theil des Vermögens eines Erblassers nach einem von den Römern auf Anrathen des Falcidius aufgestellten Gesetze ansprechen kann, sobald die im Testamente festgesetzte Legatensumme $\frac{3}{4}$ des Vermögens übersteigt.

Beyspiel. Das Vermögen sey = 5400 fl.; ein Legat für A = 400; für B = 2000; für C = 2500 fl., die Legatensumme also = 4900 > $\frac{3}{4}$ von 5400, d. i. > 4050. Da der Haupterbe demnach $\frac{1}{4}$ des Vermögens für sich nimmt: wie müssen diese $\frac{3}{4}$ oder 4050 fl. unter die Legatarien vertheilt werden?

Diese bilden eine Gesellschaft, die den gemeinschaftlichen Verlust 4900 — 4050 = 850 fl. unter sich nach den angegebenen Verhältnißzahlen 400, 2000, 2500, oder (abgekürzt) 4, 20, 25 theilen muß. Der beständige Quotient ist also $\frac{850}{49}$, diesen z. B. mit 4 multiplizirt, findet man, daß der Legatar A $69\frac{10}{49}$ fl. am Verluste tragen müsse, daher statt 400 nur $400 - 69\frac{10}{49}$ fl. empfange.

Anmerkung. Die Haberehyregel ist ebenfalls Societätsregel, nach welcher der Verlust an einigen Waaren, die zur Rettung eines Schiffes in die See geworfen werden, vertheilt wird, indem

für diesen besondern Fall das Gesetz bestimmt, daß sowohl der Eigenthümer des Schiffes, als alle Diejenigen, welche Waaren oder Güter auf dem Schiffe haben (die Reisenden mit ihrem nöthigen Gepäcke ausgenommen), nach dem Werthe des Schiffes und jeden Gutes am Verluste tragen müssen.

Man vergleiche übrigens hinsichtlich der Anwendung der geometrischen Proportionen meine Ziffernr. von S. 184—258.

d. Regel Falsi.

§. 123. Die Methode, Aufgaben mittels der Annahme einer oder mehrerer, wenn gleich unrichtiger, Zahlen richtig oder sehr nahe aufzulösen, hat man Regel Falsi genannt und in die einfache und doppelte getheilt (regula falsae positionis simplicis v. duplicis). Es hat diese Methode sehr viel Aehnliches mit der Methode, die Aufgaben durch Gleichungen zu lösen, und jene war der nächste Schritt zu dieser. Es fehlte nur noch die Uebersetzung der Frage in eine Gleichung, und die leichte Art, das Gesuchte aus der Gleichung zu entwickeln. Sie ist übrigens im Allgemeinen nur ein Rathen; aber ein Rathen, wie wir es nicht selten auf dem Gebiete selbst der höheren Mathematik anwenden.

Beyspiel 1. Man soll eine Zahl finden, deren Hälfte, 4ter und 5ter Theil die Zahl 456 giebt.

Auflösung. Man setze voraus, die gesuchte Zahl sey 20. Ungeachtet nun die genannten Theile von 20 nur die Zahl 19 geben: so wird sie doch dienen, die wahre Zahl zu finden.

Es sey $20 = a$ und die wahre zu findende Zahl $= x$: so verhält sich $a : x$, wie die ähnlichen Theile dieser Größen (§. 112. Zus. 3.). Betrachtet man nun die Summe der Theile von a, nämlich 19, als die Summe der Vorderglieder gleicher geometrischer Verhältnisse, und die Summe der Theile von x, nämlich 456, als die Summe

der Hinterglieder: so verhält sich $19 : 456 = \frac{20}{2} : \frac{x}{2}$ (d. i. wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede — §. 116.) $= 20 : x$ (§. 112.). Hieraus findet man $x = 480$, welche Zahl man auch aus $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 456$ entwickelt. In der vorigen Proportion erkennt man zugleich die für dergleichen Fälle norm- oder regelgebende Proportion: Das wegen der nicht errathenen Zahl zwar unrichtige, aber doch den Bedingungen der Aufgabe gemäß gefundene Resultat verhält sich zu dem wahren, wie die unrichtig angenommene Zahl zur wahren.

Beyspiel 2. Joannes Blanchinus (Bononiensis, der um die Mitte des 15. Jahrhunderts blühte, und besonders wegen seiner, dem Kaiser Friedrich III. gewidmeten, astronomischen Tafeln berühmt ist) legte dem Regiomontan*), mit welchem er im Briefwechsel stand**), folgende Fragen vor: 1) „Quaero duos numeros proportionales, ut 5 ad 8, quorum adinvicem productum equetur adgregatione ipsorum.“ — 2) „Quaero de 10 facere duas partes, ex quibus majo-

---

*) Oder Joannes a monte regio, wie sich Joh. Müller von Königsberg in Franken (wo er 1436 geboren war) nannte. Er, ein Schüler Purbach's, gehörte mit zu den vorzüglichsten Wiederherstellern der mathem. Wissenschaften im Occident. Von ihm sagt Ramus (lib. II. scholar. mathem.): »Norimbergam (wo Regiomontan sich längere Zeit aufhielt) justius Regiomontano gloriari posse, quam Tarentum Archyta, Syracusas Archimede, Byzantium Proclo, Alexandriam Ctesibio.«

**) Mehreres Interessante dieses Briefwechsels hat zuerst de Murr bekannt gemacht. Man sehe dessen Memorabilia Bibliothecarum public. Norimb. et univers. Altdorfinae. Pars I. (Nürnb. 1786.).

rem per minorem divisam, deinde minorem per majorem et divisam, numeros autem quotientes simul junctos eorum summa sit 25 — et hoc gratia collationis.“

Hinsichtlich der ersten Frage antwortete Regiomontan, daß er 2 Auflösungsmethoden anführen könne, „sed per alium tertium modum respondebo, quo demum scietis, artem rei et census (vocant arabice Algebram — res, italienisch cosa, war den Mathematikern jener Zeit die unbekannte Größe und census das Quadrat dieser Größe, oder, bey mehreren unbekannten Größen, das Produkt aus diesen) mihi esse familiarem. Pono primum priorem, unde ex ypothesi vestra secundus erit $1\frac{3}{5}$ rei, duco alterum in alterum, producitur $1\frac{3}{5}$ census. Item conjungo eos, resultant $2\frac{3}{5}$, habeo igitur census equales rebus, quare secundum praecepta artis agendo invenio minorem numerum eorum, quos queritis, $1\frac{5}{8}$, majorem autem $2\frac{3}{5}$.“ — Hieraus erhellt, daß Regiomontan die in vorigem Beyspiele angewendete Methode befolgte. Er nahm nämlich an, die erste gesuchte Zahl sey $= 1$, und setzte $5:8 = 1 : \frac{8}{5}$, oder $: 1\frac{3}{5}$. Nun fand er aber die Summe $1 + 1\frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$ nicht gleich dem Produkte $1.1\frac{3}{5}$, daher, $2\frac{3}{5}$ als richtig annehmend, schloß er, wie wir oben thaten, $1\frac{3}{5} : 2\frac{3}{5} = 1 : x$, woraus er $x = \frac{13}{8}$ oder $1\frac{5}{8}$ statt der falsch angenommenen Zahl 1 fand. Die Frage führt übrigens, wenn man allgemein $8 = a$, $5 = b$, und $x > y$ setzt, zu den Gleichungen: $x : y = a : b$, und $xy = x + y$.

In Betreff der zweyten Frage war Regiomontan's Antwort: „ponendo primum priorem et secundum quemadmodum res postulat 10 minorem icirco primum invenio 5 minorem radice de $21\frac{8}{27}$, secundus autem et major est 5 et radix quadrata de $21\frac{8}{27}$. Habebam enim censum et numerum aequalem rebus.“

— Aus der Auflösung der Gleichungen $x + y = 10$ und $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 25$ sieht man nicht nur, daß diese Antwort richtig war, sondern daß auch Regiomontan wußte, Gleichungen vom 2. gemischten Grade aufzulösen. (In einem andern Schreiben gesteht Blanchinus, daß es sehr schwer halte, nach den Regeln der Algebra Gleichungen vom 3. gemischten Grade aufzulösen, wie Regiomontan bekennt, eine Aufgabe, die zu einer Gleichung von 6. gemischten Grade führte, nicht auflösen zu können.)

Beyspiel 3. Drey Kaufleute, von welchen A soviel, als B und C zusammen, und B nocheinmal soviel, als C, gelegt hatte, verlieren 2400 fl.: wieviel trifft einen jeden vom Verluste?

Nimmt man an, die Einlage des C sey $= 1$, so ist die des B $= 2$ und die des A $= 3$, folglich nach §. 122. der beständige Quotient $\frac{2400}{6} = 400 =$ dem Antheile von C; ferner muß B 800 und A 1200 fl. am Verluste tragen.

Beyspiel 4. In wieviel Zeit werden 4 zugleich fließende Röhren einen Behälter füllen, wenn ihn die erste Röhre allein in 2 Stunden, die 2te allein in 3, die 3te allein in 5, und die 4te allein in 6 St. füllen kann?

Nimmt man die gesuchte Zeit $= 1$ St., so ist klar, daß, weil die erste Röhre allein in dieser Zeit die Hälfte, die 2te den 3ten Theil des Behälters (diesen $= 1$ angenommen), u. s. w. füllen würde, alle 4 Röhren auf einmal $\frac{37}{30}$ oder $\frac{6}{5}$ des Behälters füllen werden. Es ist also 1 St. zuviel Zeit. Setzt man daher in unserem ersten Beyspiele,

$$\frac{6}{5} : \frac{5}{5} = 1 \text{ St.} : x \text{ St.}$$

so findet man die richtige Zahl = 50 Minuten (vergl. §. 96. Anmerk. 1. unter Nr. 4.).

Die doppelte Regel Falsi besteht darin, daß man zwey dergleichen Voraussetzungen macht, und dann, wenn beyde nicht zutreffend sind, die wahren Größen vermittels der Fehler findet.

Beyspiel 5. Ein Vater verspricht seinem Sohne für jeden Tag, an dem er fleißig studiere, 10 Kreutzer zu geben, dagegen will er für jeden Tag Unfleiß ihm 15 Kr. abziehen. Nach 30 Tagen ist Keiner dem Andern etwas schuldig: wieviel Tage studierte der Sohn fleißig, wieviel Tage unfleißig?

Nimmt man 14 Tage Fleiß: so hätten wegen 16 T. Unfleiß dem Sohne noch 100 Kr. abgezogen werden müssen. Nimmt man daher 20 T. Fleiß: so hätte er noch 50 Kr. empfangen müssen. Man setze daher die falsch angenommenen Zahlen mit den Fehlern (0 — 100 und 0 + 50) so an:

$$\begin{array}{cc} 14 & 20 \\ & \times \\ -100 & +50 \end{array}$$

multiplizire nämlich 14 mit 50, und 20 mit 100, und dividire die Summe beyder Produkte = 2700 durch die Summe der Fehler = 150, ohne nämlich weitere Rücksicht auf ihre Zeichen zu machen. Der Quotient 18 ist die gesuchte Zahl der Tage des Fleißes, 12 also die des Unfleißes; wie man denn auch x aus der Gleichung $10x = (30 - x)15$ findet.

Wenn beyde Annahmen zu unrichtigen Resultaten oder zu Fehlern mit einerley Zeichen geführt hätten: so wäre der Quotient aus der Differenz jener Produkte, dividirt durch die Differenz der Fehler, die wahre gesuchte Zahl gewesen. Hätte man z. B. statt 20 Tage Fleiß 17 angenommen: so wäre, wie vorhin, für die An-

nahme von 14 Tagen der Fehler — 100 Statt hatte, so nun — 25 als Fehler, und die wahre Zahl 18 aus (17. 100—25. 14) : (100—25) gefunden worden.

Der Grund dieses letzten Verfahrens, ist das ganz richtige Räsonnement: die Fehler mit einerley Zeichen verhalten sich, wie die Unterschiede zwischen der wahren gesuchten Zahl und den angenommenen Zahlen. So verhält sich $-100 : -25 = 18-14 : 18-17$, d. i. $-4 : -1 = 4 : 1$ (§. 102. Zus. 4.). Oder wenn c, d die Fehler, a, b die entsprechenden falsch angenommenen Zahlen, und x die wahre Zahl bezeichnen: so hat man allgemein

$$c : d = x-a : x-b,$$

und hieraus $x = \frac{bc-ad}{c-d}$; welcher Ausdruck das Verfahren genau durch Zeichen darstellt, welches wir vorhin mit Worten aussprachen.

Für den Fall aber, daß die 2 Fehler entgegengesetzte Zeichen $+-$ haben (d. i. der eine Fehler per excessum und der andere per defectum erkannt wird), wo man also z. B. $+d$ statt $-d$ setzen muß, entwickelt man $x = \frac{bc+ad}{c+d}$, wodurch unser im Beysp. 5. zuerst eingehaltenes Verfahren bezeichnet wird.

Beyspiel 6. Es sey dieses das Beysp. 2. im Zusatz §. 80.

Man nehme an, jeder habe vor dem Spiele 60 fl. (= a) gehabt. Weil nun A 57 fl. verlor, so hatte er, wenn a die wahre Zahl ist, nach dem Spiele noch 3, B aber, der nur 12 fl. verlor, noch 48 fl., was das 4fache von 3 seyn soll. Allein dieses ist nur 12; es zeigt sich also der Fehler per defectum $= 48-12 = 36$ $(= -c)$ aus der zu klein angenommenen Zahl a. — Man setze

daher das Geld vor dem Spiele = 70 fl. (= b). Dann hat A nach dem Spiele noch 13, und B noch 58 fl. = dem 4fachen von 13 vermöge der Bedingung der Aufgabe. Allein $13.4 = 52$, und $58 - 52 = 6$, also ergiebt sich abermal ein Fehler per defectum = 6 (= — d) wegen der wieder zu klein angenommenen Zahl b. Es ist folglich die wahre Zahl $x = \frac{bc - ad}{c - d} = \frac{70.36 - 60.6}{36 - 6}$

$= \frac{2520 - 360}{30} = \frac{216}{3} = 72$ fl.

Die Rechnung nach vorstehenden Formeln wird bedeutend durch die folgenden Korrektionsformeln abgekürzt, welche aus jenen so abgeleitet werden können: Es bezeichne d den geringsten Fehler, hervorgebracht durch die Annahme der Zahl b: so ist, wenn $b < x$, und die Fehler einerley Zeichen haben, $b + y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, und hieraus $y = \frac{(b - a)d}{c - d}$ (= C); eben so hat man für $b > x$ die Gleichung $b - y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, und hieraus $y = \frac{(a - b)d}{c - d}$ (= C′). — Haben aber die Fehler verschiedene Zeichen: so hat man für $b < x$ die Gleichung $b + y = \frac{bc + ad}{c + d}$, und hieraus $y = \frac{(a - b)d}{c + d}$ (= K); eben so für $b > x$ findet man $y = \frac{(b - a)d}{c + d}$ (= K′).

Da nun y die Korrektion vorstellt: so erhält man diese, wenn man das Produkt aus der Differenz der angenommenen Zahlen in den kleinsten Fehler entweder durch die Differenz oder durch die Summe beyder Fehler dividirt, je

nachdem dieſe einerley oder verſchiedene Zeichen haben.

Beyſpiel 7. Ein Herr vermacht ſeinen Dienern folgende Erbtheile: A erhält 200 fl. mehr als B; B 300 mehr als C; C 400 mehr als D, ſo daß der Erbtheil des D nur der 4te Theil des Erbtheils von A iſt. Wieviel bekömmt Jeder?

Setzt man den Antheil für A = 2000 fl.: ſo müßte B (2000 — 200) = 1800; C (1800 — 300) = 1500, und D (1500 — 400) = 1100 fl. bekommen. Dieſe Größe ſoll zugleich das Viertel des Antheiles für A ſeyn; aber $\frac{2000}{4}$ iſt nur = 500. Folglich iſt der erſte Fehler per excessum wegen des zu hoch angenommenen a = 600 = + c. — Setzt man daher weiter den Antheil von A = 1600 (= b): ſo findet man den zweyten Fehler per excessum = 300 = + d. Daher iſt die Korrektion (C′)

$$y = \frac{(2000 - 1600)\ 300}{600 - 300} = 400,$$

folglich die wahre Zahl = x = b — y = 1600 — 400 = 1200 fl., als Antheil des erſten A, demnach der Antheil für B = 1000; für C = 700, für D = 300 = $\frac{1200}{4}$, wie es ſeyn ſoll.

Beyſpiel 8. Man ſoll x aus $x^2 + \frac{7}{15}x = 2$ finden.

Es erhellt, das $x^2 < 2$ oder $x < \sqrt{2} < 1,4\ldots$ gefunden werden müſſe. Man ſetze daher a = 1; dann müßte $1^2 + \frac{7}{15}.1 = 2$ ſeyn. Allein man erhält nur durch Reduktion $\frac{22}{15}$ oder 1,466 . . . ſtatt 2; folglich iſt der erſte Fehler per defectum = 2 — 1,466 = 0,534 (= — c). Setzt man daher die zweyte Zahl b = 1,1: ſo müßte nun $(1,1)^2 + \frac{7}{15}(1,1)$, d. i. 1,21 + 0,51 oder 1,72 gleich 2 ſeyn. Es iſt alſo der zweyte (kleinſte) Fehler per defectum = 2 — 1,72 = 0,28 (= — d). Weil nun (b — a)d = 0,1 × 0,28 = 0,028, und c — d = 0,534

$-0,28 = 0,254$: so ist die Korrektion (C) $y = \frac{0,028}{0,254} = 0,1$ (sehr nahe); daher die wahre Zahl $x = b + y = 1,2$ wenigstens sehr nahe. Allein durch Substitution dieser Zahl 1,2 statt x in obiger Gleichung findet man 1,44 $+\frac{8,4}{15} = 1,44 + 0,56 = 2$; also ist x ganz genau $= 1,2$.

Beyspiel 9. Es sey x aus $x^3 - \frac{1}{4}x = 90$ zu finden.

Wie vorhin, erkennt man vorerst, daß $x > \sqrt[3]{90}$ oder > 4 sey, daß aber, wenn man $a = 5$ setzt, und diesen Werth statt x substituirt, $x < 5$ gefunden werden müsse, x also zwischen 4 und 5 liege. Nimmt man daher $a = 4,7$: so wird $x^3 - \frac{1}{4}x = 103,825 - 1,175 = 102,648$; demnach ist a zu groß und der Fehler per excessum $= 102,648 - 90 = 12,648$ $(= +c)$. Wenn man daher 4, 4 $(= b)$ statt x substituirt: so findet man die erste Seite der Gleichung $= 84,084$; also ist b zu klein, und der (kleinste) Fehler per defectum ist $90 - 84,084 = 5,916$ $(= -d)$. Folglich ist die Korrektion (K)

$$y = \frac{5,916 \times 0,3}{18,564} = 0,099\ldots,$$

wofür man ohne merklichen Fehler 0, 1 setzen kann. Hieraus findet man die wahre Zahl $x = b + y = 4,5$ ganz genau.

Anmerkung. Hätte sich auch diese durch Korrektion gefundene Zahl noch merklich vom wahren Werthe der gesuchten Zahl entfernt, z. B. wenn man $x = 4,6$ gefunden hätte: so hätte man doch nun die noch näheren Grenzen 4, 4 und 4, 6, zwischen welchen x liegen müßte. Nähme man daher diesen näheren Gränzen gemäß neue Werthe von a und b an, und wiederholte dasselbe Verfahren: so würde die Zahl x nun richtiger gefunden werden.

Uebrigens zeigen die 2 letzten Beyspiele die Anwendbarkeit der Regel Falsi auch für höhere Gleichungen.

C. Lehrsätze in Betreff der Progressionen.

§. 124. Lehrsatz 1. In jeder arithmetischen Progression ist die Summe der äußersten Glieder (in Zeichen $a+u$) gleich I. der Summe je zweyer andern Glieder (in Zeichen $r+r'$), deren eines soweit vom ersten Gliede absteht, als das andere vom letzten; II. dem doppelten mittleren Gliede (in Zeichen $2m$) bey ungerader Gliederzahl.

Beweis.

I. Aus $a+u$ wird durch Substitution des allgemeinen Werthes für u (§. 104. Zus. 1.) $a+a\pm d(n-1)$ oder $2a\pm d(n-1)$, und aus $r+r'$ wird eben so (nach §. 104. Zus. 3.) $a\pm d(r-1)+a\pm d(n-r')$ oder $2a\pm d(n-1)$, indem $r=r'=$ derselben Zahl, also ist $a+u=r+r'$.

II. In Ansehung des mittleren Gliedes wird aus $a+u$ durch Substitution für u (nach §. 104. Zus. 3.) $a+a\pm 2dp$ oder $2(a\pm dp)$, und eben so aus $2m$ (nach demselben Zus.) die Größe $2(a\pm dp)$; also sind auch $a+u$ und $2m$ unter sich gleich.

§. 125. Aufgabe. Die Summe aller Glieder einer begrenzten arithmetischen Progression zu finden.

Auflösung. Wenn wieder n die Anzahl und S die Summe der Glieder bezeichnet: so ist diese durch die Formel

$$S=(a+u)\tfrac{1}{2}n$$

gegeben, oder die verlangte Summe ist gleich dem Produkte aus der Summe der äußersten Glieder in die halbe Anzahl der Glieder.

Beweis. Wenn 1. die Anzahl der Glieder gerade, oder $n=2p$, folglich $\frac{1}{2}n=p$ ist: so hat man aus der Progression p solcher Sümmchen (wie $r+r'$, $a+u$), von welchen im vorhergehenden Lehrsatze die

Rede war, deren Summe folglich zusammenfällt mit der Summe aller Glieder der Progression. Aber jedes jener Sümmchen ist vermöge §. 124. gleich $a + u$, also sind die p Sümmchen zusammengenommen $= (a + u)\,p$; demnach ist auch $S = (a + u)\,p$ oder $= (a + u)\,\frac{1}{2}\,n$.

Wenn aber 2. die Anzahl der Glieder ungerade, oder $n = 2p + 1$, folglich $\frac{1}{2}\,n = p + \frac{1}{2}$ ist: so ist vermöge 1. die Summe der 2p Glieder, d. i. aller Glieder weniger dem mittleren, $= (a + u)\,p$; daher die Summe aller Glieder $S = (a + u)\,p + m$. Aber nach II. des vorigen Lehrs. ist $2m = a + u$, daher $m = \frac{1}{2}(a + u)$, folglich durch Substitution $S = (a + u)\,p + \frac{1}{2}(a + u)$ $= (a + u)\,(p + \frac{1}{2}) = (a + u)\,\frac{1}{2}\,n$. Also ist obige Formel allgemein gültig, n mag gerade oder ungerade seyn.

Zusatz 1. Es ist daher durch Substitution für u (§. 104. Zus. 1.) auch $S = an + \frac{1}{2}\,n \times \pm\, d\,(n - 1)$ $= (a \pm \frac{1}{2}\,dn \mp \frac{1}{2}\,d)\,n$.

Zusatz 2. Vermittels der 2 Gleichungen $S = (a + u)\,\frac{1}{2}\,n$ und $u = a \pm d\,(n - 1) = a \pm dn \mp d$, welche 5 Größen a, d, n, u, S enthalten, kann man, wenn 3 gegeben sind, die übrigen 2, als unbekannte Größen betrachtet, allzeit finden. In dieser Hinsicht haben demnach zehn Probleme Statt, weil 5 verschiedene Dinge oder Elemente nur 10 reine Ternen geben (s. unten §. 161. Zus. 2.).

Anmerkung. Die Auflösung dieser Aufgaben bietet dem Anfänger Stoff zur Uebung in der richtigen Substitution und in der Anwendung der oben vorgetragenen Grundsätze der niedern Analysis dar. Zwey dieser Aufgaben, nämlich 1) wenn d, u, S, 2) wenn a, d, S gegeben sind, a und n oder u und n zu finden, führen auf Gleichungen von zweytem gemischten Grade. Wenn man hinsichtlich der ersten dieser Aufgaben n z. B. aus $s = (a + u)\,\frac{1}{2}\,n$ entwickelt, und den Werth $\frac{2s}{a + u}$ in der Gleichung $u = a \pm dn \mp d$ substituirt: so findet man

$$a = \pm\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(u^2 \mp 2ds \pm ud + \frac{d^2}{4}\right)}$$

$$= \pm\tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[4u^2 \mp (8s - 4u \mp d)d]},$$

worauf man denn auch n, wenn man will, durch Substitution allgemein ausdrücken kann. Wenn z. B. für eine steigende Progression, wo denn die auf d beziehlichen oberen Zeichen des vorigen Ausdruckes gelten, $d = 2$; $u = 17$; $s = 80$ ist: so ist $a = 1 \pm 2$, also entweder $= 3$, in welchem Falle man $n = 8$ und die Progression 3, 5, 7 . . . 17 findet; oder $= -1$, in welchem Falle $n = 10$ und die Progression -1, $+1$, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 gefunden wird. Es ist also auch diese Aufgabe zum Theile unbestimmt.

Wenn man ferner bey der zweyten erwähnten Aufgabe z. B. u auch aus der Gleichung $s = (a + u)\frac{1}{2}n$ sucht: so hat man die Gleichung $\frac{2s - an}{n} = a \pm dn \mp d$.

Hieraus entwickelt man

$$n = \tfrac{1}{2} \mp \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\pm\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} \mp \frac{a}{d} + \tfrac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{d \mp 2a}{2d} + \frac{1}{2d}\sqrt{[2a)^2 \pm (8s - 4a \pm d)d]},$$

und substituirt man diesen Werth in $u = a \pm dn \mp d$: so findet man

$$u = \pm\tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[2a)^2 \pm (8s - 4a \pm d)d]}.$$

Im Ausdrucke für n haben wir das doppelte Zeichen vor der Wurzel weggelassen, weil die Natur der Aufgabe nur einen +werth für n verlangt: im Ausdrucke aber für u ist $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\ldots}$ gesetzt, weil das doppelte Zeichen durch Multiplikation mit $\pm d$ entsteht.

Es sey z. B. für eine fallende Progression (wo also nun die untern Zeichen gelten) $a = \frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{3}$ und $s = -2$. Man findet $n = 6$ und $u = -\frac{7}{6}$ (durch Substitution in obigen Ausdrücken); die Progression selbst ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{6}$.

Anwendung.

§. 126. Aufgabe 1. Die ersten n ungeraden Zahlen zu summiren.

Auflösung. Hier ist $u = 2n - 1$, folglich $S = n^2$ (durch Subst.), d. i. jede vollkommne Quadratzahl ist die Summe von soviel ungeraden Zahlen, als die Wurzel Einheiten hat. So ist $9^2 = 81 =$ der Summe der 9 ersten ungeraden Zahlen.

Zusatz. Statt aber durch Summation der ungeraden Zahlen, der gegebenen Auflösung gemäß, eine Quadratzahlentabelle zu entwerfen, setzt man eine Reihe erster Quadratzahlen; die ersten Differenzen derselben werden die Reihe ungerader Zahlen bilden, deren konstante Differenz folglich 2 ist.

Es folgen nämlich die Wurzeln in der Ordnung:

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots r, (r+1).$$

Wie wir hier allgemein auf r das Glied $(r+1)$ folgen lassen: so schließe man auch die Reihe der ersten Differenzen mit einem der entwickelten allgemeinen Differenz analogen Gliede, das man erhält, indem man wieder $(r+1)$ statt r setzt. Man hat folglich allgemein

Quadratzahlen

$$1, 4, 9, 16, 25 \ldots . r^2, \quad r^2 + 2r + 1$$

I. Differenzreihe

$$3, 5, 7, 9 \ldots . \quad 2r + 1, \quad 2(r+1) + 1$$

II. Differenzreihe

$$2, 2, 2 \ldots . \quad 2 .$$

Wie nun allgemein ist $(r^2 + 2r + 1) + (2r + 1) + 2 = (r+2)^2$: so ist auch speziell $16 + 7 + 2 = 25 = 5^2$, und $25 + 9 + 2 = 36 = 6^2$, u. s. w., d. i. sucht man zwischen der eben erhaltenen Quadratzahl a^2 und der ihr unmittelbar vorhergehenden den Unterschied, und

nahme von 14 Tagen der Fehler —
so nun — 25 als Fehler, und die n
(17. 100—25. 14) : (100—25) gefun

Der Grund dieses letzten Verfah
richtige Räsonnement: die Fehler m
verhalten sich, wie die Unterschiede zu
gesuchten Zahl und den angenommenen
hält sich —100 : —25 = 18 — 14 :
: —1 = 4 : 1 (§. 102. Zus. 4.). Die
Fehler, a, b die entsprechenden falsch an
len, und x die wahre Zahl bezeichnen
gemein

$$c : d = x - a : x - b,$$

und hieraus $x = \frac{bc - ad}{c - d}$; welcher Au
fahren genau durch Zeichen darstellt, w
mit Worten aussprachen.

Für den Fall aber, daß die 2 Fe
setzte Zeichen + — haben (d. i. der ein
cessum und der andere per defectum
wo man also z. B. + d statt — d setzen
man $x = \frac{bc + ad}{c + d}$, wodurch unser im
eingehaltenes Verfahren bezeichnet wird.

Beyspiel 6. Es sey dieses das B
satz §. 80.

Man nehme an, jeder habe vor b
(= a) gehabt. Weil nun A 57 fl. verl
wenn a die wahre Zahl ist, nach dem
aber, der nur 12 fl. verlor, noch 48 fl
von 3 seyn soll. Allein dieses ist nur
also der Fehler per defectum = 48 —
aus der zu klein angenommenen Zahl

nach einerley Gesetz **arithmetische** der höheren, 2ten, 3ten . . . nten Ord- die 2., 3. . . . nte Differenzen konstant wer- Quadrate der natürlichen Zahlen eine arith- ten Ordnung, oder des zweyten Grades; hlen bilden eine Reihe der dritten Ordnung, nach die arithmetische Reihe, die wir Progres- thmetische Reihe der ersten Ordnung. — Die dieser Reihen höherer Ordnung gehört zur

lehey führen wir noch die wegen ihrer nützli- B. bey der Quadratur paraboliſcher Flächen- Formel für die Summe S der Quadrate n Diese Formel ist:

$$= 7)\ 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$$

140.

der Formel erhellt so:

$$\text{ein } n^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\frac{n-2}{} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$ Den Zäh-

olvirt, hat man $n^3 + n^2 + 2(n^2 + n)$

$2(n^2 + n) = (n^2 + n)(n+2)$

2), daher ist

$$\frac{1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} = \frac{n \cdot (n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Substitution der natürlichen Zahlen wohl spezielle, als allgemeine Gleichun-

$$1^2+0 = \frac{1.2.3}{1.2.3}$$

$$2^2+0 = \frac{2.3.4}{1.2.3}$$

$$3^2+\frac{1.2.3}{1.2.3} = \frac{3.4.5}{1.2.3}$$

$$4^2+\frac{2.3.4}{1.2.3} = \frac{4.5.6}{1.2.3}$$

$$5^2+\frac{3.4.5}{1.2.3} = \frac{5.6.7}{1.2.3}$$

. . . . . .

$$(n-2)^2+\frac{n-4.n-3.n-2}{1.2.3} = \frac{n-2.n-1.n}{1.2.3}$$

$$(n-1)^1+\frac{n-3.n-2.n-1}{1.2.3} = \frac{n-1.n.n+1}{1.2.3}$$

$$n^2+\frac{n-2.n-1.n}{1.2.3} = \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3} \text{(wie oben).}$$

Indem man nun die Glieder beyder Seiten dieser Gleichungen, mit Weglassung der gleichen Größen, addirt, hat man $1^2+2^2+3^2+4^2 \ldots +n^2$, d. i.

$$S = \frac{n-1.n.n+1}{1.2.3}+\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1+n+2)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

§. 127. **Erklärung.** Zahlen, die dadurch entstehen, daß man von einer steigenden arithmetischen Progression, deren erstes Glied die Einheit, und deren Exponent $+d$ eine ganze Zahl ist, eine beliebige Anzahl Glieder, immer vom ersten angefangen, summirt, heißen **vieleckige** oder **Polygonalzahlen**; die Zahl der summirten Glieder heißt die **Seite** oder **Wurzel** der vieleckigen Zahl.

Aus der Progression

1, 2, 3, 4, 5 . . . ., wo d = 1,

hat man durch successive Addition der Glieder die Zahlen 1 = 1; 1 + 2 = 3; 1 + 2 + 3 = 6; 1 + 2 + 3 + 4 = 10; . . . und die Zahlen 1, 3, 6, 10, . . . heißen ins Besondere dreyeckige oder Trigonalzahlen, weil die einer jeden entsprechende Anzahl Punkte ein reguläres Dreyeck bilden; nämlich

(1) · (2) · · (3) · · · (4) · · · · u. s. w.

Setzt man d = 2, folglich die Progression

1, 3, 5, 7, 9, 11, . . .

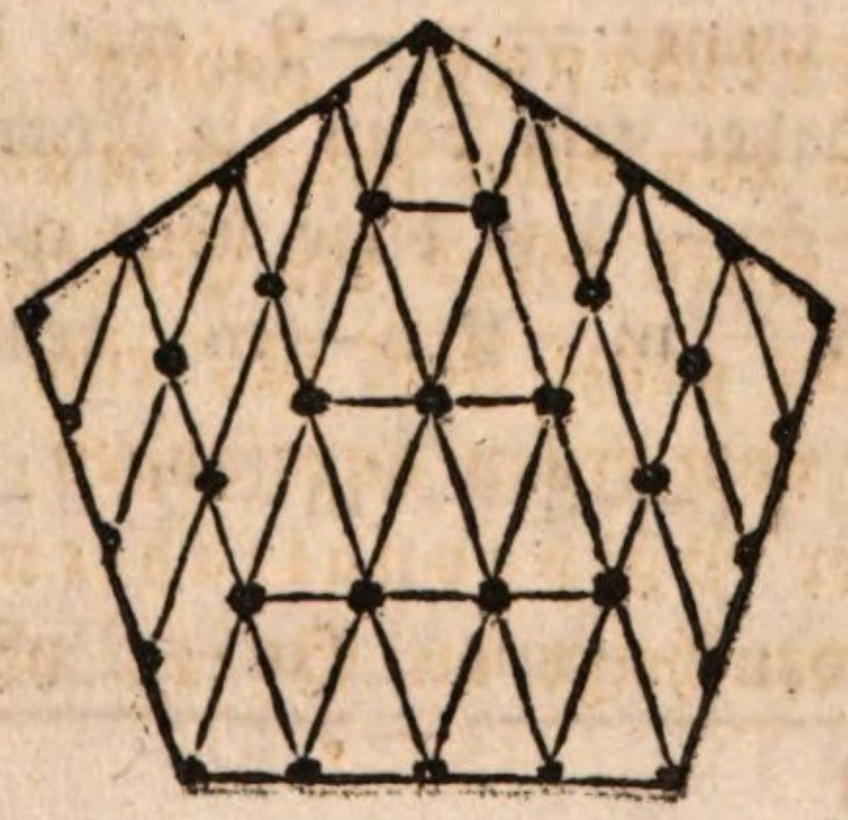
so findet man durch Addition, wie vorhin, die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, . . . welche viereckige, Quadrat- oder Tetragonalzahlen heißen, indem man wieder die Figuren bilden kann:

(1) · (2) · · (3) · · · (4) · · · · u. s. w.

Eben so sind die Summen der Glieder der Progression

1, 4, 7, 10, 13, 16, . . . wo d = 3,

die fünfeckigen oder Pentagonalzahlen, 1, 5, 12, 22, 35, 51, . . ., welche man z. B. durch die Figur darstellen kann:



Hier ist 2 die Seite der fünfeckigen Zahl 5; 4 die Seite der Zahl 22; 6 die Seite der Zahl 51, u. s. w.

Die Polygonalzahlen bilden selbst wieder arithmetische Reihen jeder Ordnung (§. 126. Anmerk.); so bilden die Trigonalzahlen 1, 3, 6, 10, 15, . . . und eben so die Pentagonalzahlen 1, 5, 12, 22, 35, ... eine Reihe der zweyten Ordnung. Addirt man selbst wieder die Glieder der Reihe der Trigonalzahlen: so erhält man die arithmetische Reihe dritter Ordnung 1, 4, 10, 20, 35, 56, . . . und die Glieder dieser Reihe heißen Pyramidalzahlen, deren Bild die unter der Form dreyseitiger Pyramiden gestellten Kugelhaufen sind. Diese, so wie alle Zahlen, die Glieder irgend einer arithmetischen Reihe von einer gewissen Ordnung sind, hat man auch überhaupt figurirte Zahlen genannt. Zu diesem Geschlechte gehören daher selbst die Polygonalzahlen.

§. 128. Aufgabe 2. I. Wenn m die Zahl der Ecken und n die Seite einer Polygonalzahl p ist, diese selbst durch eine Formel darzustellen. II. Wenn p und m gegeben sind, die Seite n zu finden.

Auflösung von I. Aus dem vorigen §. ist klar, daß der Exponent d der arithmetischen Progression, aus der durch Summirung von n Gliedern die m eckige Zahl p entspringt, immer um 2 kleiner ist, als eben diese Zahl m der Ecken oder Winkel, von welcher p ihren Namen hat; d. i. d ist immer $= m-2$, wie das erste Glied a immer $= 1$. Daher geht denn die Formel für das letzte Glied $u = a+dn-d$ in diese über $u = 1+(m-2)n-(m-2) = 3+(m-2)n-m$; demnach ist $p = S = (a+u)\frac{n}{2} = [1+3+(m-2)n-m] . \frac{n}{2} = \frac{4n+(m-n)n^2-mn}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$.

Beyspiel. Die Zahl der Thaler, um welche A ein Gut gekauft hat, ist die 365eckige Zahl von 12; wie groß ist der Kaufschilling?

Hier ist $m = 365$ und das 365eck von n allgemein $= \frac{363n^2 - 361n}{2}$, folglich das 365eck von 12 $= \frac{363.12^2 - 361.12}{2} = 23970$, oder soviel Thaler kostete das Gut.

Zusatz. Durch Substitution der Zahlen 3, 4, 5,... statt m in der vorigen Formel für p erhält man den allgemeinen Ausdruck

jeder dreyeckigen Zahl $= (1 + n)\frac{n}{2}$;

— viereckigen — $= n^2$;

— fünfeckigen — $= (3n - 1)\frac{n}{2}$;

u. s. w.

wie denn auch der erste Ausdruck dem folgenden §. und der zweyte dem §. 126. gemäß ist.

Auflösung von II. Betrachtet man n als unbekannt im Ausdrucke $p = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$: so hat man bloß eine Gleichung vom 2. gemischten Grade nach §. 83. aufzulösen. Indem man in diesem Falle das Zeichen — vor √ vernachläßigt, findet man zunächst n $= \frac{m-4}{2(m-2)} + \sqrt{\left(\frac{(m-4)^2}{4(m-2)^2} + \frac{2p}{m-2}\right)} = \frac{m-4}{2(m-2)} + \sqrt{[(m-4)^2 + 8(m-2)p]}\frac{1}{4(m-2)^2}$, daher denn

$$n = \frac{m - 4 + \sqrt{[8(m-2)p + (m-4)^2]}}{2(m-2)}.$$

Beyspiel. Es sey 3009 eine 24eckige Zahl: welches ist ihre Seite oder Wurzel?

Hier ist $n = \frac{20 + \sqrt{(529584 + 400)}}{44} = \frac{20 + 728}{44}$ $= 17$.

§. 129. Aufgabe 3. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen zu finden.

Auflösung. Weil hier $a = 1$ und $u = n$ ist, so geht $S = (a + u)\frac{1}{2}n$ in $S = \frac{(1 + n)n}{2} + \frac{n^2 + n}{2}$ über, welches der gesuchte Ausdruck ist.

Beyspiel. Wieviel Ziegel braucht man zur Deckung eines dreyeckigen Daches, wenn auf der ersten der 50 Latten 1 Ziegel, und auf jeder folgenden Latte 1 Ziegel mehr liegt?

Hier ist $n = 50$, folglich $S = 51 . \frac{50}{2} = 1275$, als der gesuchten Zahl der nöthigen Ziegel.

Zusatz. Die verwandte merkwürdige Eigenschaft der natürlichen Zahlen, daß nämlich die Summe der Würfel von den natürlichen Zahlen, d. i. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ gleich dem Quadrate der Summe n natürlicher Zahlen, d. i. $= (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2$ oder $= (1 + n)^2 . \frac{1}{4}n^2$ sey *), kann als gegründet so eingesehen werden:

Es ist $(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$, und $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$, oder durch Substitution $= (1 + 2)^3 + 3^3$, oder, wenn man $1 + 2 = c$ setzt, so ist $(c + 3)^2$

*) Unter andern Eigenschaften der Zahlen entdeckte diese Jac. Peletarius in seinem (zu Paris 1558 erschienenen) Buche »de occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, libri duo.«

$= c^2 + 3^3$. Wie hier c die Summe der natürlichen Zahlen, welche der letzten 3 vorhergehen, bezeichnet: eben so bezeichne s die Summe der natürlichen Zahlen, welche derjenigen Zahl vorhergehen, die man beliebig als letzte oder nte natürliche Zahl betrachtet. Man nehme ferner an, die genannte Eigenschaft finde für irgend n natürliche Zahlen Statt, oder es sey $(s + n)^2 = s^2 + n^3$: so wird sie auch für $(n + 1)$ natürliche Zahlen Statt finden, oder es wird auch $(s + (n + 1))^2 = s^2 + (n + 1)^3$ seyn.

Denn aus jener ersten hypothetisch angenommenen Formel entwickelt man $s = \frac{n^3 - n^2}{2n}$. Wenn daher die ausgesprochene Eigenschaft, unter der Voraussetzung, daß sie für irgend n natürliche Zahlen gilt, auch für $n + 1$ natürliche Zahlen Statt finden soll: so müssen die Resultate, die man erhält, wenn man in $s = \frac{n^3 - n^2}{2n}$ statt n substituirt $n + 1$, und wenn man den Werth für s aus $(s + (n + 1))^2 = s^2 + (n + 1)^3$ entwickelt, zusammenstimmen. Wirklich findet man durch diese doppelte Operation denselben Werth $s = \frac{n^3 + 2n^2 + n}{2(n+1)}$. Wenn also die angegebene Eigenschaft für irgend n natürliche Zahlen Statt findet, so ist sie auch für $(n + 1)$ natürliche Zahlen gültig. Sie findet aber Statt, wenn $n = 3$ ist (wie wir oben sahen), also gilt sie auch für $3 + 1$, d. i. für 4 natürliche Zahlen; gilt sie aber für 4 $(= n)$ natürliche Zahlen: so gilt sie auch für $n + 1$, d. i. für 5 natürliche Zahlen, u. s. w. ins Unendliche. Es ist demnach jene ausgesprochene Eigenschaft der natürlichen Zahlen von allgemeiner Gültigkeit.

Da ferner $(1 + n)\frac{n}{2}$ der allgemeine Ausdruck einer

Trigonalzahl, deren Wurzel = n, ist (§. 128. I. Zus.): so erhellt, daß 1) jede Summe der Würfel natürlicher Zahlen nur eine Quadratzahl sey; daß 2) die Summe der Würfel von n natürlichen Zahlen bestimmt gleich sey dem Quadrate einer Trigonalzahl, deren Seite ebenfalls n ist; so ist z. B. $1^3+2^3+3^3+4^3$, d. i. $1+8+27+64 = (1+2+3+4)^2 = 10^2 = 100$.

§. 130. Aufgabe 4. Bey Ausgrabung eines Brunnens von 20 Schuh Tiefe ist der erste Schuh zu 16 Kr., der zweyte und so jeder folgende, wegen immer schwererer Arbeit, um 12 Kr. mehr bedungen: was kostet die ganze Arbeit?

Auflösung. Nach der Formel §. 125. Zus. 1. ist durch Substitution $S = (16+6.20-6)20 = 130.20 = 2600$ Kr. oder = 43 Fl. 20 Kr.

§. 131. Lehrsatz 2. In jeder geometrischen Progression ist das Produkt der äußersten Glieder (in Zeichen a.z) gleich I. dem Produkte je zweyer andern Glieder (in Zeichen r.r'), deren eines soweit vom ersten Gliede absteht, als das andere vom letzten; II. dem Quadrate des mittleren Gliedes (in Zeichen m^2) bey ungerader Gliederzahl.

Beweis. I. Aus a.z wird durch Substitution des allgemeinen Werthes für z (§. 104. Zus. 1.) a^2e^{n-1}; aber auch r.r' ist (nach §. 104. Zus. 4.) $= ae^{r-1}.ae^{n-r'} = a^2e^{n-1}$ (indem r und r' gleiche Zahlen bezeichnen); folglich ist auch $a.z = r.r'$.

II. Es ist nach demselben Zusatze hinsichtlich des mittleren Gliedes $a.z = a.ae^{2p} = a^2e^{2p}$; aber auch $m^2 = (ae^p)^2 = a^2e^{2p}$ (§. 53.); also ist auch $a.z = m^2$.

Zusatz. Es lassen sich daher je zwey dieser Pro-

Produkte wieder durch eine geometrische Proportion darstellen. So z. B. giebt die Progression

$$1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729$$

die Produkte $1 . 729 = 3 . 243 = 9 . 81 = 27^2$, woraus man hat $1 : 243 = 3 : 729$; oder $1 : 9 = 81 : 729$; oder $3 : 81 = 9 : 243$; oder $3 : 27 : 243, \ldots$

§. 132. Lehrsatz 3. In jeder geometrischen Progression verhält sich die Summe aller Glieder weniger dem letzten (in Zeichen S—z) zu derselben Summe weniger dem ersten Gliede (in Zeichen S—a), wie die Einheit zum Exponenten der Progression, d. i. $= 1 : e$.

Beweis. Folgende Verhältnisse

$$\begin{aligned} a &: ae \\ ae &: ae^2 \\ ae^2 &: ae^3 \\ \ldots &: \ldots \\ \ldots &: \ldots \\ ae^{n-2} &: ae^{n-1} \end{aligned}$$

sind wegen desselben Exponenten e einander gleich. Daher gilt nach §. 116. die Proportion:

$$a + ae + ae^2 + \ldots + ae^{n-2} : ae + ae^2 + ae^3 + \ldots ae^{n-1} = 1 : e.$$

Vergleicht man hiemit die formularische Progression

$$a : ae : ae^2 : ae^3 \ldots . : ae^{n-2} : ae^{n-1},$$

so erhellt, daß das erste Glied jener Proportion die Summe aller Glieder dieser Progression mit Ausnahme des letzten Gliedes, das zweyte Glied aber jener Proportion dieselbe Summe mit Ausnahme des ersten Gliedes der Progression enthalte, daß folglich sey:

$$S - z : S - a = 1 : e.$$

Zusatz 1. Es ist also $(S - z)e = S - a$, woraus man durch Entwickelung von S die Formel für die

Summe aller Glieder einer geometrischen Progression, nämlich

$$S = \frac{ze - a}{e - 1} \text{ (oder durch Subst. für z)} = \frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{(e^n - 1)a}{e - 1}$$

findet.

Anmerkung. Man findet dieselben Formeln auch auf folgende Weise:

Wenn man $S = a + ae + ae^2 + \ldots + ae^{n-2} + ae^{n-1}$ mit e multiplizirt, so hat man $eS = ae + ae^2 + \ldots + ae^{n-2} + ae^{n-1} + ae^n$.

Zieht man nun die oberen Größen von den untern ab: so erhält man $eS - S = -a + ae^n$, d. i. $S(e-1) = ae^n - a$; woraus denn $S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$, wie vorhin.

Weil ferner $ae^n = ae^{n-1} . e = ze$ (§. 104. Zus. 1.) ist: so hat man auch $S = \frac{ze - a}{e - 1}$.

Zusatz 2. Zwar sind diese Formeln für jede sowohl steigende, als fallende Progression hinsichtlich der aufzufindenden Summe aller Glieder gültig, allein für die fallende Progression ist der Exponent e ein ächter Bruch, daher wird $(e - 1)$ eine —zahl, wie auch der Zähler jener Formeln. Weil nun $\frac{ze - a}{e - 1}$ auch $= \frac{-(a - ze)}{-(1 - e)}$, und eben so $\frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{-(a - ae^n)}{-(1 - e)}$ ist: so setzt man für den Fall einer fallenden Progression

$$S = \frac{a - ze}{1 - e} \text{ oder } = \frac{a - ae^n}{1 - e} = \frac{(1 - e^n)a}{1 - e}.$$

In der That giebt die noch mit a multiplizirte Entwickelung von $\frac{1 - e^n}{1 - e}$ (nach §. 41. Zus. 3.) die Summe der n Glieder einer geometrischen Progression.

Zusatz 3. Wenn man die Formel $S = \frac{ze - a}{e - 1}$ so ausdrückt: $S = \frac{z - a}{e - 1} + z$, und z und a unbestimmt das größte und kleinste Glied bedeuten läßt: so zeigt sie die Regeln, welche die ältern Mathematiker über die Summation steigender geometrischer Progressionen aufstellten. So sagt z. B. Peurbach (in seinem Buche „Elementa Arithmetices“ — 1536.): „in dupla progressione (wo nämlich 2 der Exponent, daher $e - 1 = 1$ ist) terminum minimum a maximo deme, et quod superest, maximo junge, et exibit summa totius. In tripla vero minimum aufer a maximo, et residui medietatem ad maximum adde.“

Zusatz 4. Mit Hilfe der für S entworfenen Formeln kann man auch die Summe der Glieder jeder allgemeinen, unter einer veränderten Form gegebenen, geometrischen Progression allgemein darstellen. Es sey z. B. die Progression

$$a : -ac : ac^2 : -ac^3 \ldots . \pm ac^{n-1},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n ungerade oder gerade ist, zu summiren. Setzt man $e = -c$ und $z = \pm ac^{n-1}$: so hat man durch Substitution in $\frac{ze - a}{e - 1}$ nun $S = \frac{-c \cdot \pm ac^{n-1} - a}{-c - 1} = \frac{\pm ac^n + a}{c + 1}$ $= \frac{1 \pm c^n}{c + 1} . a$. Wenn z. B. $c = -2$ und $a = 2$, folglich die Progression mit 6 Gliedern diese wäre: $2, -4, +8, -16, +32, -64$; so fände man $S = \frac{1 - 64}{3} . 2 = -42$.

Zusatz 5. Da, wie oben §. 125. Zus. 2., so auch hier die Gleichungen $z = ae^{n-1}$ und $S = \frac{ze - a}{e - 1}$ (oder

$= \frac{e^n - 1}{e - 1} . a$) fünf verschiedene Größen enthalten: so finden in Beziehung auf geometrische Progressionen ebenfalls 10 Probleme Statt, wenn nämlich je 3 jener Größen gegeben sind, die 2 andern zu finden.

Allein einige dieser Aufgaben führen zu Gleichungen, welche den zweyten gemischten Grad übersteigen; ihre Auflösung liegt daher außerhalb der Grenzen der niedern Mathematik. Wenn z. B. n, z, S gegeben, und a und e zu finden sind: so kömmt man, indem die aus beyden Gleichungen entwickelten Werthe von a einander gleichgestellt werden, auf die Gleichung: $e^n - \frac{S}{S - z} . e^{n-1} = - \frac{z}{S - z}$. — Andere dieser Aufgaben sind nur mit Hilfe der Logarithmen (von welchen wir im folg. Abschn. handeln) lösbar. Es sey z. B. n aus $z = ae^{n-1}$ zu entwickeln. Man findet $\frac{z}{a} = e^{n-1} = \frac{e^n}{e}$, daher $\frac{ze}{a} = e^n$ (und hieraus $n = \log. \frac{ze}{a} : \log. e$). —

Bey einigen Aufgaben giebt die Auflösung unbequeme oder zur Berechnung schwere Ausdrücke. Um z. B. 1) S aus a, n, z zu finden, sucht man zuerst aus $z = ae^{n-1}$ die nicht gegebene Größe $e = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{\sqrt[n-1]{z}}{\sqrt[n-1]{a}}$. In $S = \frac{ze}{e-1} - \frac{a}{e-1}$ wird durch Substitution $\frac{ze}{e-1} = \frac{z\sqrt[n-1]{z}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}} : \frac{\sqrt[n-1]{z}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}} - 1 = \frac{z\sqrt[n-1]{z}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}} \times \frac{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{a}} = \frac{z\sqrt[n-1]{z}}{\sqrt[n-1]{a}}$;

da eben so $-\frac{a}{e-1} = -\frac{a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{z}-\sqrt[n-1]{a}}$ entwickelt wird: so hat man $S = \frac{z\sqrt[n-1]{z}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{z}-\sqrt[n-1]{a}} = \frac{z^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}}$. Um 2) S aus e, n, z zu finden, hat man vorerst a aus $z = ae^{n-1}$, nämlich $a = \frac{z}{e^{n-1}}$, daher ist $S = \frac{ze}{e-1} - \frac{a}{e-1}$

$= \frac{ze}{e-1} - \frac{z}{e^{n-1}(e-1)} = \frac{ze^n(e-1) - z(e-1)}{e^{n-1}(e-1)^2}$

$= \frac{(e^n-1)z}{e^{n-1}(e-1)}$.

§. 133. Lehrsatz 4. In jeder geometrischen Progression mit n Gliedern verhält sich das erste Glied zum letzten, wie die (n—1)te Potenz des ersten Gliedes zu derselben Potenz des zweyten Gliedes, oder es ist, in Zeichen ausgedrückt,

$$a : z = a^{n-1} : b^{n-1}.$$

Beweis. Wenn man für z den allgemeinen Ausdruck ae^{n-1}, so wie ae statt b setzt: so muß die Proportion

$a : ae^{n-1} = a^{n-1} : ae)^{n-1}$ oder: $a^{n-1} . e^{n-1}$ (§. 53.) eine wahre Proportion seyn, wenn der Satz wahr seyn soll. Das erste findet Statt wegen desselben Exponenten e^{n-1} in beyden Verhältnissen; also ist der Lehrsatz wahr.

Zusatz. Wenn also speziell ist a : b : c, oder a : b : c : d, so sind auch die Proportionen

$$a : c = a^2 : b^2$$

oder $a : d = a^3 : b^3$

gültig.

Anwendung.

A) Auf die Summation.

§. 134. I. Beyspiele zur Summation endlicher steigender geom. Progressionen.

Beyspiel 1. Ein junger Mensch gewann 3 fl., mit welchen er einen kleinen so glücklichen Handel anfieng, daß er am Ende eines jeden der 12 aufeinander folgenden Jahre seine jedesmalige Paarschaft um das Doppelte vermehrt sah. Wie reich war er am Ende des 12ten Jahres?

Antwort. Hier ist nach §. 132. Zus. 1. durch Substitution $S = \frac{(2^{12}-1).3}{1}$. Nun ist $2^3 = 8$, daher nach §. 53. Zus. 3. $8^2 = 64$ $(= 2^6)$, und $64^2 = 4096$ $(= 2^{12})$; folglich $S = 4095.3 = 12285$ fl.

Beyspiel 2. Wenn 1 Saamenkorn in einem Jahre 10 Körner, und jedes dieser jährlich wieder 10 Körner bringt: wieviel giebt dieß Körner im 9. Jahre, und wieviel in diesem ganzen Zeitraume?

Antwort. Hier ist $z = ae^{n-1} = 10^8 = 100'.000000$, und $S = \frac{ze-a}{e-1} = \frac{1000'.000000-1}{9} = 111'.111111.$

Beyspiel 3. Nach der Erzählung eines arabischen Schriftstellers Selâhô ddîn Mohammed Alsé-phahi in seinen Commentarien über das Gedicht „Lamiato' l Ajam" soll Ardschir Ebn Babec (ein persischer König) das Bretwürfelspiel, und ein Indianer Sessa Ebn Daher das weit vorzüglichere Schachspiel*) erfunden, und sich vom Könige Shehram

*) Das Wort Satransch (Schachspiel) in der türkischen Sprache wird von einem persischen Worte, das 100 Beschwerlichkeiten oder Liste bedeutet, nach Andern von einem andern persischen Worte abgeleitet, so daß die Abstammung ungezweifelt persisch ist.

auf dessen Aufforderung als Belohnung soviel Waitzen erbeten habe, als die Summe austragen werde, wenn man ihm für das erste Feld im Schachbrett 1 Korn, und für jedes folgende der 64 Felder immer die doppelte Anzahl Waitzenkörner gäbe. Der König habe diese Bitte wie um eine Kleinigkeit anfangs als Verachtung seiner Gnade betrachtet, aber belehrt, daß dem Sessa diese Summe nicht gegeben werden könne, auch wenn man allen Waitzen in der Welt zusammenbringen wolle, den Sessa nun noch mehr wegen dieser sinnreichen Bitte, als wegen seiner Erfindung bewundert. — Man soll nun untersuchen, ob die dem Könige Shehram von seinen Mathematikern ertheilte Belehrung richtig war?

Antwort. Hier ist $S = \frac{(e^n - 1)\,a}{e-1} = \frac{(2^{64}-1).1}{1}$.

Nun ist (nach §. 53. Zus. 3.) $2^4 = 16$; $16^2 = 256 (= 2^8)$; $256^2 = 65536 (= 2^{16})$; $65536^2 = 4294967296 (= 2^{32})$, und eben diese Zahl nochmals quadrirt und vom Quadrate die Einheit abgezogen, hat man
$S = 18\cdots446744\cdot073709\cdot551615$ Waitzenkörner. Nun rechnet man auf 1 englischen Scheffel 491520 Körner; folglich macht jene Summe 37··529996·894754 englische Scheffel. Zur Abtragung dieser Summe, auch wenn man sie täglich zu 1 Million Scheffel annähme, wären demnach 102821 Jahre erforderlich gewesen. — Unter der Annahme der 104 Felder des großen türkischen Schachbrettes *) würden diese Zahlen noch bedeutend erhöht werden müssen.

---

*) Dieses hat nämlich für jeden Gegner 13 Figuren (und eben soviel Fußgänger); in deren Mitte den König; rechts den Großvesir, der wie der kleine Vesir (oder die Königin) und zugleich wie das Pferd geht; auf diesen folgt weiter rechts der Hirsch, der um ein Haus weiter als das Pferd springt; dann Rhinoceros mit dem Gange des Elephanten (Laufers) und des Pfer-

II. Beyspiele zur Summation fallender sowohl endlicher, als unendlicher geometrischer Progressionen.

Beyspiel 1. Wenn man am ersten Tage 12 Meilen, aber an jedem der folgenden 7 Tage immer nur das Drittel von der vorausgehenden Tagreise zurücklegt: wieviel Meilen wird man in 8 Tagen machen?

Antwort. Nimmt man einstweilen die erste Tagreise zu 1 Meile an: so hat man die Progression

$1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} \ldots : \frac{1}{3})^7$, statt dieser:

$$12 : \frac{12}{3} : \frac{12}{9} \ldots : \frac{12}{3^7}.$$

Daher ist $S = \frac{a - ze}{1 - e}$ (§. 132. Zus. 2.) $= \frac{1 - \frac{1}{3})^8}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{3 - \frac{1}{3^7}}{2} = \frac{3^8 - 1}{3^7 . 2}$. Aber 3^8 (indem man, wie vorhin die Zahl 2, nun 3 elevirt) $= 43046721$, daher $3^7 = 14348907$; folglich ist $\frac{3^8 - 1}{3^7 . 2} = \frac{43046720}{28697814} = 1,5$ sehr nahe. Diese Zahl mit 12 multiplizirt, giebt die gesuchte Meilenanzahl $= 18$ sehr nahe.

Etwas bequemer ist es, die zu summirende fallende Progression rückwärts zu lesen, und sie so in eine steigende zu verwandeln. In diesem Falle wird bey unserem Beyspiele das erste Glied $a = \frac{1}{3})^7$, der Exponent $e = 3$, und $z = 1$. Man hat denn sogleich $S = \frac{(e^n - 1) . a}{e - 1}$

$= \frac{3^8 - 1}{3^7 . 2}$, wie vorhin.

---

des; dann Pferd; dann Elephant (Laufer) und endlich Roch (Thurm).

Beyspiel 2. Welches ist die Summe der Glieder der ins Unendliche fallenden Progression

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} \ldots : \frac{1}{\infty}?$$

oder $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots : \frac{1}{\infty}$?

Antwort. Da man das letzte Glied $\frac{1}{\infty}$ als gegen das erste verschwindend betrachten, oder $= 0$ setzen kann: so geht $S = \frac{a - ze}{1 - e}$ in $S = \frac{a}{1 - e}$ über, und es wird $S = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ gefunden. Indessen ist es auch wieder etwas bequemer, die Reihe rückwärts zu lesen, und demnach das erste Glied $\frac{1}{\infty}$ gegen das letzte als verschwindend zu betrachten. In diesem Falle, wo $a = 0$ und $z = \frac{1}{3}$, oder $= \frac{1}{2}$ ist, wird allgemein $S = \frac{ze - a}{e - 1} = \frac{ze}{e - 1}$; daher wird in unseren Beyspielen $S = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3}{2} = \frac{1}{2}$; oder $S = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{1} = 1$ gefunden.

Da diese Resultate $\frac{1}{2}$ und 1 nur unter der Voraussetzung, daß man das letzte Glied obiger Reihen als unendlich klein $= 0$ setzt, gefunden werden: so erhellt, daß die Zahlen $\frac{1}{2}$ und 1 nur als Grenzen zu betrachten sind, welchen sich die fraglichen Summen jener Reihen ins Unendliche nähern.

Uebrigens zeigt auch hier wieder die nach §. 41. Zus. 3. vorgenommene Entwickelung sowohl von $\frac{a}{1 - e}$, als von $\frac{ze}{e - 1}$, daß die erste Formel in der That die Summe einer ins Unendliche steigenden, und die zweyte Formel die Summe einer ins Unendliche fallenden Progression ausdrücke.

Merkwürdig ist hiebey noch der besondere Fall (der bey Archimed's Methode, ein parabolisches Segment zu quadriren, seine Anwendung findet), wenn jedes folgende Glied der Progression um das Vierfache kleiner ist, als das vorhergehende, d. i. wenn man allgemein hat $a : \frac{a}{4} : \frac{a}{16} : \frac{a}{64} \ldots$ In diesem Falle ist $S = \frac{ze}{e-1} = \frac{a \cdot 4}{3}$, daher $3S = 4a$ und $S : a = 4 : 3$, d. i. die Summe aller Glieder einer solchen Progression verhält sich zum ersten oder größten Gliede, wie 4 zu 3. So wenn z. B. $a = 1$ ist, wird $S = \frac{4}{3}$, oder gleich 4 Drittheilen des größten Gliedes.

Beyspiel 3. Welchem vulgären Bruche ist der periodische Dezimalbruch (§. 41. Anmerk. 2.) $0,\dot{3}$; oder $0,\dot{6}\dot{3}$; oder $0,\dot{2}\dot{9}\dot{6}$; oder $0,\dot{1}42857\dot{}$ gleich?

Antwort. Da 1) $0,\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} \ldots$ ist: so hat man $S = \frac{ze}{e-1} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $(=0,\dot{3})$. weil 2) eben so $0,\dot{6}\dot{3} = \frac{63}{10^2} + \frac{63}{10^4} + \frac{63}{10^6} \ldots$ also der Exponent e dieser rückwärtsgelesenen Reihe $= 10^2$ ist: so hat man $S = \frac{63 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2}{10^2 - 1} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ $(=0,\dot{6}\dot{3})$. — Auf gleiche Weise ist 3) $0,\dot{2}\dot{9}\dot{6} = \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$, und 4) $0,\dot{1}42857\dot{} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ (indem der Zähler selbst das gemeinschaftlich größte Maß ist).

Hiernach erhellt von selbst, daß, wenn eine gegebene Dezimalzahl zum Theile nicht wiederkehrende Zif-

fern enthält, die durch diese bezeichnete Zahl vorerst von dem periodischen Dezimalbruche abgesöndert werden müsse. Weil z. B. $1,\dot{3} = 1 + 0,\dot{3} = 1 + \frac{1}{3}$ ist: so ist $1,\dot{3} = \frac{4}{3}$. Eben so ist $1,41\dot{6}$ (wo nur 6 die immer rekurrirende Ziffer ist) $= 1,41 + 0,00\dot{6}$, wo denn nur in Ansehung des letzten Bruches die Reihe $\frac{6}{10^3}, \frac{6}{10^4} \ldots$ zu summiren ist. Man hat daher (die Reihe rückwärts gelesen gedacht) $z = \frac{6}{10^1} = 6.10^{-1}$ und $e = 10$, folglich $S = \frac{6.10^{-1}.10}{10-1} = \frac{6.10^{-2}}{9}$, hiezu $1,41 = 141.10^{-2}$ addirt, findet man $1,41\dot{6} = 141.10^{-2} + \frac{6.10^{-2}}{9}$

$= \frac{(1269+6)10^{-2}}{9} = \frac{1275}{900} = \frac{17}{12}$ (indem 75 das gemeinschaftlich größte Maß ist). — Eben so ist $0,3541\dot{6} = \frac{3541}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \frac{6}{10^6} + \ldots$ Den ersten Bruch abgesöndert, bilden die übrigen eine fallende Reihe, deren Summe $= \frac{6.10}{9.10^5} = \frac{1}{15000}$ ist. Folglich hat man $0,3541\dot{6}$

$= \frac{3541}{10000} + \frac{1}{15000} = \frac{53125}{150000} = \frac{17}{48}$ (durch Abkürzung mittels des gemeinsch. größten Maßes 3125).

Anmerkung. Auch wiederkehrende Reihen können auf ähnliche Art, wie die geometrischen Progressionen, summirt werden.

Man versteht unter wiederkehrende Reihe eine solche, deren jedes Glied durch Addition einer gewissen Anzahl Vorderglieder, die mit bestimmten + oder — größen multiplizirt sind, erzeugt wird. Eine solche Reihe ist z.

B. 2, 3, 19, 101, 543 ... Es entsteht nämlich 543 aus $19.2 + 101.5$; eben so ist $101 = 3.2 + 19.5$, u. s. w. so, daß also das Gesetz dieser Reihe nur von den Zahlen 2 und 5 abhängt.

Wenn daher allgemein die Glieder a, b, c, d, e, f, ... nach dem Gesetze gebildet werden, daß jedes folgende Glied aus 2 Vordergliedern, wovon das erste mit m, das andere mit p multiplizirt ist, entsteht: so hat man die Gleichungen

$$c = ma + pb$$
$$d = mb + pc$$
$$e = mc + pd$$
$$f = md + pe$$
$$\ldots\ldots$$

Also ist $c + d + e + f + \ldots = m(a + b + c + d + \ldots) + p(b + c + d + e + \ldots)$, d. i. die erste Seite der Gleichung ist die Summe aller Glieder weniger den 2 ersten; der Faktor von m ist die Summe aller Glieder weniger den 2 letzten, und der Faktor von p ist die Summe aller Glieder weniger dem ersten und letzten Gliede; oder es ist

$$S - a - b = m(S - e - f) + p(S - a - f),$$

folglich $S = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$. Kennt man also die 2 ersten und 2 letzten Glieder und die 2 Faktoren m, p: so kann man auch diese wiederkehrende Reihe summiren.

B) Anwendung auf das Interpoliren.

§. 153. 1. Soll man zwischen zwey Größen a, y, die man als Glieder einer steigenden arithmetischen Progression betrachtet, eine gewisse Anzahl Glieder einschalten: so entwickelt man aus $y = a + (x - 1)d$ den Exponenten $d = \frac{y - a}{x - 1}$. Man soll z. B. zwischen 1 und

2 neun mittlere arithmetisch stetige Glieder einschalten, so daß die Zahl 2 (= y) als 11tes oder xtes Glied der steigenden Progression erscheine. Hier wird demnach $d = \frac{2-1}{11-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; folglich ist die Reihe:

1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4 . . . . . 2.

Für die fallende arithmetische Progression wird — d genommen.

2. Werden aber die gegebenen Größen, zwischen welchen eingeschaltet werden soll, als Glieder einer geometrischen Progression betrachtet: so entwickelt man entweder aus $y = ae^{x-1}$ den Exponenten $e = \sqrt[x-1]{\frac{y}{a}}$; oder man sucht aus $b = \sqrt[x-2]{a^{x-2}y}$ (§. 133.) das zweyte Glied b, welches durch a dividirt den Exponenten e giebt. Soll man z. B. zwischen den Zahlen 2 und 128 fünf mittlere Glieder interpoliren, so daß 128 als 7tes oder xtes Glied einer steigenden geometrischen Progression erscheine: so wird $e = \sqrt[6]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{64})}$ (§. 55. 6.) $= \sqrt[3]{\pm 8} = \pm 2$ (§. 57). Also ist die Reihe

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, wenn + gilt,

2, —4, 8, —16, 32, —64, 128, wenn — gilt.

Oder es ist $b = \sqrt[6]{2^5 . 128} = \sqrt[6]{4096} = \pm 4$, daher $e = \frac{b}{a} = \frac{\pm 4}{2} = \pm 2$, wie vorhin.

3. Wenn aber die Progression, zwischen deren Glieder man eine gewisse Anzahl mittlerer Glieder interpoliren soll, schon vorgegeben ist, so verfährt man bequemer auf folgende Weise:

4. Will man eine steigende Progression über das erste Glied hinaus rückwärts fortsetzen: so darf man nur + d in — d, oder e in $\frac{1}{e}$ verwandeln; und umge-

kehrt, wenn eine fallende Progression rückwärts fortzusetzen ist.

Es sey $a = 2$, $d = 3$, folglich die arithmetische Progression 2, 5, 8, 11, 14 .... Durch Rückwärtsfortsetzung hat man die Reihe

(1) ... $-7, -4, -1, | +2, +5, +8, ...$

Es sey $a = 10$, $-d = -3$, also die Progression 10, 7, 4, 1, -2, -5, ... Durch Rückwärtsfortsetzung bekömmt man die Reihe

(2) ... 19, 16, 13, | 10, 7, 4, 1, -2, -5....

Wenn man ferner $a = 3$, $e = 2$, demnach die geometrisch steigende Progression 3, 6, 12, 24, 48... so erhält man durch Rückwärtsfortsetzung die Reihe

(1′) ... $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, | 3, 6, 12, ...$

Endlich für $a = 12$, $e = \frac{1}{2}$, findet die fallende geometrische Progression 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, ... und durch Rückwärtsfortsetzung die Reihe Statt:

(2′) ... 48, 24, | 12, 6, 3, ...

5. In diesen neuen, hinlänglich fortgesetzten Reihen, findet sich immer ein Glied, welches $= a + d$, oder $= ae$ ist, wie $+5$ in (1); $+7$ in (2), und 6 in (1′) und (2′). Wenn die Reihe von diesem Gliede an rechts hin steigt: so fällt sie links hin, und umgekehrt. Nennt man dieses Glied das Anfangsglied mit dem Stellenzeiger oder Index 0, und giebt den rechts hin auf dasselbe folgenden Gliedern die Stellenzeiger $+1$, $+2$, $+3$, ... und den links hin folgenden die Stellenzeiger -1, -2, -3, ...: so hat man folgende Bezeichnung:

Stellenzeiger

...−6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6...

Reihe (1)

...−13, −10, −7, −4, −1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23...

Reihe (2)

... 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, −2, −5, −8, −11...

Reihe (1′)

... $\frac{3}{32}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384...

Reihe (2′)

... 384, 192, 96, 48, 24, 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{32}$...

6. Diese Reihen Glieder mit den Stellenzeigern ...−3n, −2n, −n, 0, +n, +2n, +3n, ..., indem man jedesmal n−1 Glieder weglässt, bilden für sich wieder eine arithmetische oder geometrische Progression; deren Exponent ist resp. nd oder e^n. So, wenn n=2 ist, hat man

aus (1) die Reihe −13, −7, −1, 5, 11, 17, 23;
aus (2) — — — 25, 19, 13, 7, 1, −5, −11;
aus (1′) — — — $\frac{3}{32}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{2}$, 6, 24, 96, 384;
aus (2′) — — — 384, 96, 48, 6, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{32}$.

7. Man schaltet daher umgekehrt zwischen je 2 nächsten Gliedern einer Progression (n−1) Glieder ein, wenn man statt dem Exponenten derselben einen andern setzt, der für die arithmetische Progression der nte Theil, und für die geometrische die nte Wurzel des vorigen Exponenten ist. Will man z. B. in Reihe (1) (unter 5.) zwey Glieder einschalten: so wird der neue Exponent $= \frac{d}{3} = \frac{3}{3} = 1$; man hat daher z. B. zwischen 5 und 8 die Glieder 5+1 (=6) und 6+1 (=7). Will man eben so in Reihe (2) 1 Glied einschalten: so wird die neue Differenz $= -\frac{d}{2} = \frac{-3}{2}$; man hat daher z. B. zwischen 7 und 4 das Glied $7-\frac{3}{2}$ oder $\frac{11}{2}$, so daß das

folgende Glied ist $\frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4$, wie es seyn muß. — Will man ferner in der Reihe (1′) z. B. zwischen 6 und 12 zwey (= n − 1) Glieder interpoliren: so wird der neue Exponent $= \sqrt[3]{2}$, folglich das erste neue Glied nach $6 = 6\sqrt[3]{2}$; das hierauf folgende $= 6\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{4}$, und demnach das folgende Glied $= 6\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{8} = 6.2 = 12$, wie es die Progression fordert.

8. Noch kann man sich das Interpoliren durch Formeln für das rechts und links hin auf das Anfangsglied folgende Glied, dessen Stellenzeiger nämlich $+1$ oder -1 ist, erleichtern. Wenn man nämlich dieses Glied als erstes $= a$, demnach das Anfangsglied der arithmetischen Progression $= a + (d)$ setzt, und in der steigenden Reihe für a mit dem Stellenzeiger -1 die Differenz d mit $+$, für a aber mit dem Stellenzeiger $+1$ die Differenz d mit $-$, und umgekehrt in der fallenden Reihe nimmt: so hat man nur die Formel $(a + d) - \frac{d}{n}$ für das rechts oder links des Anfangsgliedes liegende erste Glied, das man einschalten soll, zu berechnen. Will man z. B. in Reihe (1) das auf das Anfangsglied 5 rechts folgende erste Glied, das unter zweyen zu interpoliren ist, finden: so giebt die Formel das gesuchte $= 8 - 3 - (-\frac{3}{3}) = 8 - 3 + 1 = 6$; und das erste links liegende ist $= 2 + 3 - \frac{3}{3} = 4$.

Hinsichtlich der geometrischen Progression, deren Anfangsglied unter obiger Voraussetzung $= ae$ ist, hat man eben so die Formel $ae\sqrt[n]{\frac{1}{e}}$ für das erste links oder rechts einzuschaltende Glied, wobey bloß zu bemerken ist, daß in der steigenden Progression für a mit dem Stellenzeiger $+1$ der Exponent e als ächter Bruch, allein für a mit dem Index -1 derselbe Exponent als ganze oder

gemischte Zahl — umgekehrt aber in der fallenden Progression — genommen werden müsse. Wenn man z. B. zwischen 2 nächsten Gliedern der Reihe (1′) ein Glied einschalten soll: so ist dieses, inwiefern es rechts dem Anfangsgliede liegt, $= 12 . \frac{1}{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; aber das erste links zu interpolirende Glied ist $= 3 . 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$. Es ist dann das auf $6\sqrt{2}$ weiter rechts folgende Glied $= 6\sqrt{2} . \sqrt{2} = 6 . 2 = 12$, und das links unmittelbar auf $6\sqrt{\frac{1}{2}}$ folgende Glied $= 6\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} = 6 . \frac{1}{2} = 3$, wie es seyn muß. — In der fallenden Reihe (2′) aber ist das rechts 6 einzuschaltende Glied $= 3 . 2\sqrt{\frac{1}{2}}$, demnach das hierauf folgende $= 6\sqrt{\frac{1}{2}} . \sqrt{\frac{1}{2}} = 6 . \frac{1}{2} = 3$; das links 6 zu interpolirende Glied ist $= 12 . \frac{1}{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, demnach das unmittelbar folgende $= 6\sqrt{2} . \sqrt{2} = 12$, wie es die Reihe fodert. (Vergl. unten §. 141. Zus. 3.)

Siebenter Abschnitt.

Die elementare Logarithmentheorie.

§. 136. **Erklärung 1.** Nach §. 104. Zus. 1. kann man jede geometrische Progression in diese

$$1 : a : a^2 : a^3 \ldots : a^{n-2} : a^{n-1}, \text{ oder in}$$

$$a^0 : a^1 : a^2 : a^3 \ldots : a^{n-2} : a^{n-1}$$

d. i. in eine Progression verwandeln, deren Glieder lauter natürliche Potenzen des Exponenten der Progression oder ihres zweyten Gliedes a sind.

Weil man jedes (r+1)te Glied einer solchen Progression, oder des Verhältnisses der Einheit zum (r+1)ten Gliede findet, indem man das zweyte Glied a, oder was dasselbe ist, das Verhältniß des ersten Gliedes zum zweyten $a^0 : a^1$ oder 1 : a zur rten Potenz elevirt: so wird die durch das zweyte Glied a vorgestellte Zahl mit Recht die Grundzahl (basis), und das Verhältniß 1 : a das Grundverhältniß genannt. Es zeigt daher auch umgekehrt jeder Exponent r der Grundzahl an, daß das Grundverhältniß 1 : a mit sich selbst rmal durch Multiplikation gesetzt worden sey, um das (r+1)te Glied jener Reihe, oder das Verhältniß der Einheit zu dem (r+1)ten Gliede zu erzeugen. So zeigt der Exponent 2 in a^2 an, daß 1 : a duplizirt, — und 3 in a^3 zeigt an, daß das Grundverhältniß 1 : a triplizirt werden

mußte (§. 113.), um das Glied a^2 oder das Verhältniß $1 : a^2$, und a^3 oder $1 : a^3$ zu erzeugen.

Jeder der in arithmetischer Progression fortschreitenden Exponenten 0, 1, 2, 3, . . . der Glieder obiger Progression zählt demnach, wieoft das Grundverhältniß $1 : a$ zur Erzeugung des Gliedes, dessen Exponent er ist, angewendet werden müsse, oder wievielmal das Grundverhältniß in den Verhältnissen $1 : a^2$; $1 : a^3$; . . . enthalten sey. Es sind daher diese Exponenten wahre Zahlen der Verhältnisse (λογων αριθμοι), Logarithmen. Da nun jede Zahl, als aus der Einheit entsprungen, schon an und für sich das Verhältniß zur Einheit involvirt: so kann man auch sagen, daß jene Exponenten 0, 1, 2, 3 . . . die Logarithmen seyen von den Zahlen, welche die entsprechende geometrische Progression $1 : a^2 : a^3 : a^4$ . . . bilden.

Zusatz 1. Stellt man sich nach einer der oben erörterten Methoden zwischen je zweyen, unmittelbar aufeinander folgenden Gliedern der Progression $1 : a : a^2 : a^3$ . . . n Glieder, z. B. nur ein einziges Glied, interpolirt vor, so daß man die Reihe hat:

$$1 \text{ (oder } a^0) : a^{\frac{1}{2}} : a^1 : a^{\frac{3}{2}} : a^2 : a^{\frac{5}{2}} : a^3 \ldots$$

$$\text{oder } a^0 : a^{0,5} : a^1 : a^{1,5} : a^2 : a^{2,5} : a^3 \ldots$$

so sieht man, daß, wie die Exponenten 0, 1, 2, 3 . . ., als ganze Zahlen, eben so die Exponenten $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, . . . als gebrochene Zahlen (ächte oder unächte Brüche) die Logarithmen seyen von den jene geometrische Progression bildenden Zahlen.

Zusatz 2. Wenn man, wie natürlich und am bequemsten ist, a (als Grundzahl) irgend eine ganze, von der Einheit verschiedene, +zahl bedeuten läßt: so stellen die Glieder der vorigen Reihe (Zus. 1.), soviele man ihrer auch einschalten mag, lauter rationale oder irrationale

—zahlen > 1 vor. Setzt man aber diese Reihe über a^0 hinaus, gegen die Linke hin, fort, wodurch die Reihe entsteht:

$\ldots a^{-2}, a^{-1,5}, a^{-1}, a^{-0,5}, a^0, a^{0,5}, a, a^{1,5}, a^2, \ldots$

so stellen nun die neuen Glieder $a^{-0,5}, a^{-1}, \ldots$ oder $\frac{1}{a^{0,5}}, \frac{1}{a}, \ldots$ lauter ächte Brüche mit rationalen oder irrationalen Nennern vor.

Zugleich erhellt, daß die nun erhaltenen —exponenten die Logarithmen dieser ächten Brüche seyen, oder mit andern Worten: daß jeder ächte Bruch eine —zahl zum Logarithmus habe.

Zusatz 3. Weil sich in der betrachteten, vor- und rückwärts beliebig weit fortgesetzten, Reihe kein —glied (allgemein: kein $(-a^m)$) vorfinden kann: so haben —zahlen keine Logarithmen.

Zusatz 4. Es ist also, wenn man den Logarithmus eines Gliedes der vorigen Progression (Zus. 2.) mit log. bezeichnet, $0 = \log. a^0 = \log. 1$; $0,5 = \log. a^{0,5}$; $1 = \log. a^1 = \log. a$; $1,5 = \log. a^{1,5}$; $2 = \log. a^2$; .... und eben so $-0,5 = \log. a^{-0,5} = \log. \frac{1}{\sqrt{a}}$; $-1 = \log. a^{-1} = \log. \frac{1}{a}$; ....

Zusatz 5. Hieraus erhellt, daß, wenn z. B. die Zahl 3 der Logarithmus einer Zahl n seyn soll, diese Zahl $n = a^3$, oder dem Würfel der Grundzahl a gleich seyn müsse, und allgemein: wenn a die Grundzahl, und $x = \log. n$ ist: so ist $n = a^x$, daher denn auch durch Substitution $n = a^{\log. n}$; und eben so: wenn $y = \log. m$ und a die Grundzahl ist, so ist $m = a^y = a^{\log. m}$.

§. 137. Erklärung 2. Setzt man den Werth für a oder für das Grundverhältniß 1 : a fest: so machen die diesem Werthe gemäß jeder Zahl zugehörenden Loga-

rithmen ein logarithmisches System aus, dessen Basis ist a, oder dessen Grundverhältniß eben jenes 1 : a nach seinem einmal bestimmten Werthe ist.

Zusatz 1. Da sich für a oder 1 : a unendlich viele Zahlwerthe setzen lassen: so sind unendlich verschiedene Logarithmensysteme denkbar.

Zusatz 2. In jedem dieser Systeme ist 0 der Logarithmus von 1, und 1 der Logarithmus der angenommenen Grundzahl, weil allgemein $0 = \log. a^0$ und $1 = \log. a^1$ (§. 136. Zus. 4.) ist. Man kann daher auch sagen, daß die Grundzahl oder Basis eines logarithmischen Systems diejenige Zahl sey, deren Logarithmus in diesem Systeme die Einheit ist.

Allein außer 0 gehören dieselben Zahlen z. B. 1, 2, 3, . . ., als Logarithmen, nach Verschiedenheit des logar. Systems zu ganz verschiedenen Zahlen, als Potenzen der Grundzahl. Setzt man z. B. $a = 2$: so hat man die Reihe

1) $2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4$

oder 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : : : :

und setzt man $a = 10$: so hat man die Reihe

2) $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : . . .$

oder 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 . . .

Nach 1) ist dann $0 = \log. 1$; $1 = \log. 2$; $2 = \log. 4$; $3 = \log. 8$ . . . und nach 2) ist $0 = \log. 1$; $1 = \log. 10$; $2 = \log. 100$; $3 = \log. 1000$; $4 = \log. 10000$; . . . .

Anmerkung. Der Geschichte zufolge waren teutsche Gelehrte die Ersten, welchen eine richtige Idee der Logarithmen beywohnte. Zwar werden in dieser Hinsicht Jordanus Nemorarius, der in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts durch mehrere Schriften, besonders durch eine ziemlich vollständige Arithmetik in 10 Büchern (vergl. Kästner's Gesch. der Mathem. I. Bd. S. 88.) sich berühmt machte; ferner Simon Jacob aus Komburg (im 16. Jahrh.) und Michael Stifel *) genannt. Allein nur von

*) 1496 zu Eslingen geb.; erst Augustinermönch daselbst, dann

Letzterem kann man aus dessen Schriften unzweydeutig darthun, daß er einen richtigen Begriff von den Logarithmen hatte, ohne jedoch auf demselben weiter fortzubauen. Man findet nämlich in dessen Arithm. integr. (Norimb. 1544) nicht nur diese Reihen

0 1 2 3 4 . . .
1, 2, 4, 8, 16, ...

sondern auch folgende, das Fundament der Logarithmen enthaltende Sätze: »Qualiacunque facit progressio geometrica multiplicando et dividendo, talia facit progressio arithmetica addendo et subtrahendo« — und: 5 non solum significat, numerum sibi subscriptum (32) facere propositionem quintam, sed etiam esse proportionem (rationem) quintuplicatam respectu primae proportionis.« Zu derselben Zeit und zum Theile noch früher kannte man die sogenannte Prosthaphäresis, mittels welcher besonders die Multiplikation durch Addition, und die Division durch Subtraktion absolvirt, und so die Berechnung der Kugeldreyecke zum Behufe der Astronomie erleichtert wurde (vergl. Kästner am a. O. S. 567.). Diese Lehre wurde im Anfange des 17. Jahrh. von mehreren Schriftstellern vorzüglich kultivirt; Jac. Ludolffus (Senator und Prof. der Mathematik zu Erfurt, wo er 1624 geboren war) gab eine tabullarische Tetragonometrie (Leipz. 1690), und Graf Herwart von Hohenburg »tabulas Arithmeticae προσ-θαφαιρέσεως universales« etc. (München 1610) heraus (vergl. Heilbronner's »histor. mathes. univ.« pag. 827 et 801.). Men würde sich sehr irren, wenn man diese prosthaphäretische Lehre für Logarithmentheorie und jene Tafeln für logarithmische nehmen wollte.

Johann Neper (Napier oder Nepair, Baron von Merchiston, geb. 1550) und Jobst Burgi (Justus Byrgius, ein Schweitzer, geb. 1552) waren die Ersten, welche fast zu gleicher Zeit (dieser noch etwas früher, als jener) sich sehr annähernde Logarithmensysteme erfanden und bekannt machten; Neper in seinem zu Edinburg 1614 herausgegebenen Buche »Mirifici logarithmorum Canonis descriptio« etc., und Byrg in seinem

---

durch Luther Prediger zu Holzendorf unweit Wittenberg. Er hatte den jüngsten Tag auf den 18. October 1533 berechnet; starb zu Jena 1567.

Buche »Arithmetische und geometrische Progreß-Tabulen« ꝛc. (gedruckt in der alten Stadt Prag 1620). Die Art, wie Neper seine Logarithmen berechnete, giebt er in einem Aufsatze »mirifici canonis constructio« an, welchen dessen Sohn 1620 im Druck herausgab (vergl. Klügel's mathem. Wörterb. Th. 3. S. 534 u. ff.). Byrg's Methode, seine Logarithmen zu berechnen, erklärt Kästner in seiner Fortsetzung der Rechenkunst VIII. Cap. IV. Abschn. §. 24. Uebrigens waren beyde logarithmischen Systeme zunächst zum Behufe der trigonometrischen und astronomischen Rechnungen erfunden. Da Neper die Grenzen des zwischen 1,0000001 und 1,0000000 fallenden Logar. von der Zahl 9999999 nicht näher angeben konnte oder wollte: so setzte er $1 = \log. 9999999$, welche letztere Zahl (näher 9999999,00000005) die Basis seines Systems ist.

Henry Briggs (Prof. der Geometrie am Gresham College in London und zuletzt Prof. zu Oxford, wo er 1680 starb) wählte die Zahl 10 zur Basis, deren Logar. er also $= 1$ setzte, was Neper billigte. Auf dessen Erwunterung gab Briggs sein Werk »logarithmorum Chilias prima« (die Logarithmen auf 8 Decimalstellen berechnet) 1618 heraus. Diesem Buche ließ er sein mühevolles Werk »Arithmetica logarithmica«, in welchem die Logarithmen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 auf 14 Decimalstellen berechnet sind, im J. 1624 folgen. Adrian Vlacq, Buchhändler und Mathematiker in Gouda, die von Briggs gelassene Lücke ausfüllend, gab die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000, auf 10 Decimalstellen berechnet, im Jahre 1628 (2. Aufl.) heraus. — Der geniale Kepler*), von der Wichtigkeit der Erfindung der Logarithmen überzeugt, und mit allem Interesse ergreifend Neper's Arbeit, dachte nicht nur auf einen neuen solideren Beweis, als Fundament der Erfindung, sondern gab auch eine leichtere Berechnungsart der Neper'schen Logarithmen an, und ordnete dessen Tafeln auf eine bequemere Weise in seinem Werke »Joan. Kepleri Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, praemissa demonstratione legitima ortus logarithmorum eorumque usus«

*) Kepler war 1571 zu Wiel oder Weil im Wirtembergischen geboren und starb den 5. November 1630 zu Regensburg, wo ihm erst 1808 von edlen Menschenfreunden unter dem Fürsten Primas Dalberg ein würdiges Monument gesetzt wurde.

(Marpurgi 1624). Diesem Werke folgte 1625 noch ein Supplement.

§. 138. **Erklärung 3.** Es sey a die Grundzahl eines logarithmischen Systems, daher x im Ausdrucke $a^x = y$ der Logarithmus der Zahl y. Nimmt man nun an, daß diese Zahl y, wenn der Logarithmus x um $\frac{x}{\infty}$ wächst, um das Produkt aus ihrem mten Theile in jenen unendlich vielsten Theil ihres Logarithmus, d. i. um $\frac{y}{m} \cdot \frac{x}{\infty}$ zunehme, daß folglich m von der Größe sey, daß $a^{x + \frac{x}{\infty}}$ oder $a^x \cdot a^{\frac{x}{\infty}} = y + \frac{yx}{m\infty}$ werde: so heißt diese Größe m der Modul (modulus) jenes logarithmischen Systems.

Zusatz 1. Aus dieser Gleichung läßt sich jede darin eingehende Größe entwickeln.

Wenn man in ihr **erstens** a^x statt y substituirt: so hat man 1) $a^{\frac{x}{\infty}} = 1 + \frac{x}{m\infty}$ daher 2) $a^x = \left(1 + \frac{x}{m\infty}\right)^\infty$, und, für $x = 1$, 3) $a = \left(1 + \frac{x}{m\infty}\right)^\infty$.

Substituirt man **zweytens** y statt a^x in obiger Gleichung: so hat man 4) $y^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{x}{m\infty}$, daher 5) $y = \left(1 + \frac{x}{m\infty}\right)^\infty$ und 6) $x = m\infty\left(y^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$; hieraus 7) $m = \frac{x}{\infty\left(y^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)}$.

Zusatz 2. Wenn man in 3) den Ausdruck der Größe a nach §. 65. Zus. 1 entwickelt: so hat man

$$a = 1 + \frac{\infty}{1.m\infty} + \frac{\infty.\infty - 1}{1.2m^2\infty^2} + \frac{\infty.\infty - 1.\infty - 2}{1.2.3.m^3\infty^3} + \ldots$$

Aber es ist $\infty - 1, \infty - 2, \ldots$ eben soviel, als ∞, oder $\infty . \infty - 1 = \infty^2$, u. s. w., folglich ist durch Reduktion

$$a = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2.3m^3} + \frac{1}{2.3.4m^4} + \ldots$$

d. i. durch den Modul m eines Logarithmensystems ist dessen Grundzahl a, folglich das ganze System gegeben. Jeder andere Modul, wie jede andere Grundzahl, bedingt also ein anderes logarithmisches System (§. 137. Zus. 1.).

§. 139. Lehrsatz. In zwey verschiedenen logarithmischen Systemen verhalten sich die Logarithmen derselben Zahl y, wie die Moduls jener Systeme.

Beweis. Wenn $x = \log. y$ für den Modul m, also $x = m\infty (y^{\frac{1}{\infty}} - 1)$ (§. 138. 6)), und eben so $z = \log. y$ für den Modul n, also $z = n\infty (y^{\frac{1}{\infty}} - 1)$ ist: so verhalten sich die Logarithmen x, z zueinander, wie diese ihre Werthe, oder es ist nach §. 112. $x : z = m : n$.

Zusatz 1. Es ist also $x = m . \frac{z}{n}$, und $z = n . \frac{x}{m}$, d. i. wenn man den in einem System, dessen Modul n ist, gegebenen Logarithmus z einer Zahl y durch eben diesen Modul n dividirt, und den Quotienten mit dem Modul m eines andern Systems multiplizirt: so erhält man den Logarithmus derselben Zahl y in letzterem System, dessen Modul m ist.

Zusatz 2. Man kann daher auch sagen, der Mo-

dul sey diejenige Zahl, durch deren Multiplikation die Logarithmen des einen Systems sich in die Logarithmen eines jeden andern Systems verwandeln lassen.

§. 140. Erklärung 4. Das Logarithmensystem, dessen Modul $= 1$ ist, heißt das natürliche (hyperbolische), wie dessen Logarithmen ebenfalls die natürlichen (hyperbolischen) genannt werden. Jedes andere System nennt man ein künstliches, so wie dessen Logarithmen künstliche Logarithmen heißen. Der Kürze wegen bezeichnen wir die künstlichen durch l und die natürlichen durch λ.

Zusatz 1. Also ist im natürlichen System, wo $m = 1$ ist,

die Grundzahl $a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$

d. i. $a = 2,\ 7182818284590452353602874713526624977$
$57247093699959574966967627 \ldots$*)

Diese höchst merkwürdige Zahl, die Basis des natürlichen Logarithmensystems, deren Logarithmus also $= 1$ ist (§. 137. Zus. 2.), wird von den Mathematikern aller Nationen mit e bezeichnet.

Zusatz 2. Läßt man im Ausdrucke $x = m \cdot \frac{z}{n}$ (§. 139. Zus. 1.) x den künstlichen Logarithmus von y im künstlichen System, dessen Modul m ist, z aber den natürlichen Logarithmus derselben Zahl y im natürlichen System, dessen Modul $n = 1$ ist, bedeuten: so geht jener Ausdruck in diesen über

---

*) Hr. Prof. Rothe, welcher diese Zahl (bis auf 64 Decimalstellen) berechnete, bemerkt, daß der Werth dieser Zahl zwar zu klein sey, aber noch nicht um die Hälfte einer Einheit in der letzten Decimale von der Wahrheit abweiche, daß folglich die letzten Decimalziffern in Vega's und Schulzen's Tafeln unrichtig seyen (man sehe die Vorr. zu Rothe's Lehrb. der Arithm. 2. Th.).

$$l.y = m\lambda.y,$$

welcher zeigt, daß man den künstlichen Logarithmus einer Zahl dadurch erhalte, daß man den natürlichen Logarithmus derselben Zahl mit dem Modul m des künstlichen Systems, zu welchem l.y gehört, multiplizirt.

Dagegen zeigt der abgeleitete Ausdruck $\lambda.y = \frac{l.y}{m}$, daß man den natürlichen Logarithmus einer Zahl erhalte, wenn man den künstlichen derselben Zahl durch den Modul des entsprechenden künstlichen Systems dividirt.

Zusatz 3. Aus demselben Ausdrucke hat man allgemein den Modul $m = \frac{l.y}{\lambda.y}$, d. i. den Modul eines künstlichen Systems, indem man den zu diesem System gehörigen Logarithmus einer Zahl durch den natürlichen Logarithmus derselben Zahl dividirt.

Setzt man daher diese Zahl $y = e$, folglich $\lambda.y = \lambda.e = 1$ (Zus. 1.); so ist $m = l.y = l.e$, d. i. der Modul m eines künstlichen System ist gleich dem zu diesem gehörigen künstlichen Logarithmus der Basis e des natürlichen Systems.

Setzt man aber $l.y = 1$: so ist $m = \frac{1}{\lambda.y}$, welcher Ausdruck zeigt, daß man ebenfalls den Modul m eines künstlichen Systems bekomme, wenn man die Einheit (als Modul des natürlichen Systems) durch den natürlichen Logarithmus z. B. der Grundzahl jenes künstlichen Systems dividirt.

Zusatz 4. Im Briggischen oder Briggisch-Vlacqischen Logarithmensystem ist die Grundzahl

oder Basis a = 10, und log. 10 = 1; ferner ist im natürlichen System der Logarithmus von 10 = 2,30258509 29940456840179914546843642076011014886 29 . . . Die Einheit also durch diese Zahl dividirt, findet man den Modul m des vorhin genannten Systems = 0,4342944 81903251827651128918916605082294397005804 . . . = log. e (Zus. 3.).

Es ist also das Briggisch-Vlacqische System ein künstliches, das man auch das gemeine, so wie seine Logarithmen die gemeinen, zu nennen pflegt. In diesem System, welchem zunächst die oben §. 137. Zus. 2. unter 2) angeführte Reihe zum Grunde liegt, sind nur die Logarithmen der natürlichen Potenzen der Grundzahl 10 ganze Zahlen; ferner sind die Logarithmen der zwischen 10^0 und 10^1 oder zwischen 1 und 10 zu interpolirenden Glieder, durch welche die zwischen 1 und 10 liegenden Zahlen ausgedrückt werden, ächte Brüche. Die aber zwischen 10^1 und 10^2 oder zwischen 10 und 100 zu interpolirenden Glieder haben, als Potenzen der Grundzahl 10, sämmtlich die Form $10^{1+\frac{1}{n}}$. Weil nun diese Glieder die zwischen 10 und 100 liegenden natürlichen Zahlen vorstellen: so erhellt, daß die Logarithmen dieser Zahlen unter der Form $1+\frac{1}{n}$ (wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet) lauter unächte Brüche seyen, daß ferner eben so die Logarithmen der zwischen 100 und 1000 liegenden Zahlen, wie 101, 102 . . ., die Form $2+\frac{1}{n'}$ der gemischten Zahlen oder unächten Brüche haben, u. s. w. (§. 136. Zus. 1.). Stellt man sich die Fundamentalreihe dieses Systems, nämlich 1 : 10 : 100 : 1000 : . . . gegen die Linke hin fortgesetzt vor: so zeigt der Zus. 2. §. 136., daß die so erhaltenen Glieder lauter ächte Brüche und ihre Loga-

rithmen —zahlen, und zwar wieder ganze oder gebrochene Zahlen seyen.

Zusatz 5. Da man die Logarithmen dieses künstlichen Systems, welche die Form $c + \frac{1}{n}$ (wo c eine ganze Zahl 0, 1, 2, 3, . . . bezeichnet) haben, nicht in vulgären, sondern in Dezimalbrüchen (mit bald wenigeren, bald mehreren Dezimalziffern) berechnete (vergl. §. 137. Anmerk.), und man auch den Logarithmen, welche ganze Zahlen sind, die Form der Dezimalzahlen (z. B. log. 100 = 2 = 2,00000 . . .) geben kann: so besteht jeder Logarithmus $c + \frac{1}{n}$ dieses Systems aus 2 Theilen; den einen Theil stellen nämlich die ersten, gewöhnlich durch ein Komma abgesönderten, Ziffern vor, welche den Logarithmus, inwiefern er die ganze Zahl c ist, ausdrücken; den andern Theil $\frac{1}{n}$ drücken die auf das Komma folgenden Dezimalziffern aus. Dieser Theil heißt die Mantissa, jener erste Theil aber die Charakteristik (Kennziffer) des Logarithmus. Die Charakteristik des einer vorgegebenen Zahl entsprechenden Logarithmus ist vermöge Zus. 4. allzeit bekannt. So ist für alle zwischen 1 und 10 fallenden Zahlen, z. B. für 4 oder 4,65 . . . die Charakteristik c = 0; für alle zwischen 10 und 100 fallende Zahlen, z. B. für 21 oder 21,34 . . . ist c = 1, u. s. w., d. i. in diesem System ist die Kennziffer des Logarithmus um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern, mit welchen die vorgegebene Zahl, als ganze, geschrieben wird. Daher läßt auch umgekehrt die Charakteristik eines vorgegebenen Logarithmus erkennen, einer wieviel-ziffrigen Zahl, als einer ganzen Zahl, derselbe entspreche; ist z. B. 5,2376 . . . ein Logarithmus dieses gemeinen Systems: so entspricht ihm eine sechsziffrige

ganze Zahl (mit einer unbestimmten Anzahl von Dezimalen).

Anmerkung. Da man der Verwandlung der gemeinen und natürlichen Logarithmen ineinander bisweilen bedarf: so kann man sich nun die Art, wie diese Verwandlung geschieht, vollkommen deutlich machen.

Wenn man nämlich 1) nach Zus. 2. einen gemeinen Logarithmus durch die Zahl 0,43429... (Zus. 4.) dividirt, oder, da $0,43429... = \frac{1}{\lambda . 10}$ ist, mit $\lambda . 10$, d. i. mit 2,3025851 multiplizirt: so wird er in einen natürlichen Logarithmus (derselben Zahl) umgewandelt. Und 2) umgekehrt, wenn man nach Zus. 2. einen natürlichen Logarithmus mit 0,43429... multiplizirt, oder durch $\lambda . 10$, d. i. durch 2,3025851 dividirt: so wird er in den gemeinen Logarithmus (derselben Zahl) verwandelt. Zur Erleichterung der Rechnung bedient man sich der folgenden kleinen Tafel der einfachen Produkte jener Zahl 2,3025..., aus welchen man soviele Dezimalen beybehält, als die Schärfe der Rechnung fodert.

1	2,302585092994
2	4,605170185988
3	6,907755278982
4	9,210340371976
5	11,512925464970
6	13,815510557964
7	16,118095650958
8	18,420680743952
9	20,723265836946

Soll man z. B. zu dem natürlichen Logarithmus 1,5000... die zugehörige Zahl finden: so hat man mit Hilfe dieses Täfelchens leicht den Quotienten 0,6514417 aus 1,5000000 : 2,3025851; dieser Quotient ist der gemeine Logarithmus, und die ihm entsprechende, aus dem Briggisch-vlacqschen oder andern gewöhnlichen Tafeln zu entnehmende Zahl 4,4816... ist eben dieselbe, welche zu dem vorgegebenen natürlichen Logarithmus gehört.

Zusatz 6. Aus dem bereits über die Natur der Logarithmen und die logarithmischen Systeme Gesagten erhellen folgende Wahrheiten:

1. Jede ganze und gebrochene + oder —zahl kann einer logarithmischen Größe gleichgesetzt werden; so ist

$2 = \log. 10^2$; $0,5 = \log. 10^{0,5}$; $-2 = \log. \frac{1}{10^2}$

u. s. w., wenn 10 die Basis ist. Allgemein: wenn $y = b^n$ und b die Basis des Systems ist: so ist $n = \log. b^n =$ log. y (basis b) (§. 136. Zus. 4.), was man kurz durch $n = \log. b^n$ (b bezeichnen kann. Um also eine Zahl n logarithmisch auszudrücken, darf man nur die Basis eines Logarithmensystems zu derselben Potenz erheben, welche die Zahl n anzeigt, und dieser Potenz log. vorsetzen.

Kennt man daher zwar den Logarithmus einer Zahl n, nicht aber die Basis x des Systems: so darf man nur, um diese zu finden, aus der Zahl n die ebensovielste Wurzel ausziehen, als der Logarithmus anzeigt. Soll nämlich z. B. 2 der Logarithmus von 100 seyn, so muß $100 = x^2$, daher $x = \sqrt{100}$ seyn. Allgemein: wenn $z = \log. n$ (x ist, so muß $n = x^z$, daher die Basis $x = \sqrt[z]{n}$ seyn.

2. Man nehme 2 Reihen, z. B.

$1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : \ldots$

und $1 : 100 : 100^2 : 100^3 : 100^4 : \ldots$

so ist z. B. $2 = \log. 10^2$ (10 $= \log. 100^2$ (100 oder $= 10^2)^2$ (10^2, und umgekehrt ist $2 = \log. 100^{\frac{2}{2}}$ ($100^{\frac{1}{2}}$ $= \log. 10^2$ (10, d. i. die logarithmische Größe, oder die ihr gleiche Zahl, bleibt ungeändert, wenn man sowohl die Zahl, von der man den Logarithmus kennt, als die Basis des Systems, zu derselben (ganzen oder gebrochenen) Potenz erhebt. Der allgemeine Ausdruck ist: log.

p (b = log. p^n (b^n. Hat man daher z. B. log. p (b^n und log. q (b^r: so kann man diese Größen in andere gleiche umwandeln mit derselben Basis, nämlich in log. p^r (b^{nr} und log. q^n (b^{nr}.

3. Will man aus log. a (b den Logarithmus b (a ableiten: so darf man nur die Einheit durch jenen ersten Logarithmus dividiren. Denn man setze a = b^x, also log. a (b = log. b^x (b = x: so ist log. b (a = log. b $(b^x = \log. b^{\frac{1}{x}}$ (b (vermöge 2.) $= \frac{1}{x} = \frac{1}{\log. a (b}$, d. i. log. b (a $= \frac{1}{\log. a (b}$. Eben so, wenn n = log b (c ist: so ist $\frac{1}{n} = \frac{1}{\log. b (c} =$ log. c (b. z. B. 2 = log. 100 (10, also $\frac{1}{2}$ = log. 10 (100; oder 2,302585 . . . = log. 10 (e, also $\frac{1}{2,3025 \ldots}$ = log. e (10 = dem Modul m des gemeinen Systems (Zus. 4.).

§. 141. Lehrsatz I. Die Multiplikation der Zahlen verwandelt sich in Addition ihrer Logarithmen; II. die Division in Subtraktion des Logarithmus des Divisors von dem des Dividends; III. die Erhebung zur Potenz in Multiplikation des Logarithmus von der zu erhebenden Zahl mit dem Exponenten der verlangten Potenz; IV. die Wurzelausziehung in Division des Logarithmus der Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, durch den Exponenten der verlangten Wurzel.

Durch diese 4 logarithmischen Operationen erhält man nämlich immer einen Logarithmus, dessen entsprechende Zahl die gesuchte ist.

Beweis von I. Wenn a die Basis des Logarithmensystems ist, dessen Logarithmen man zur Auffindung des Produktes f aus den gegebenen Faktoren b, c anwenden will, und man demnach den Faktor b durch a^x, und den Faktor c durch a^y ausdrückt (§. 136. Zus. 4.): so ist $x = \log. a^x = \log. b$, und $y = \log. c$ in eben diesem System. Folglich ist das Produkt $b.c = a^x . a^y = a^{x+y} = f$, und $x + y = \log. a^{x+y} = \log. f$; d. i. (durch Substitution) $\log. b + \log. c = \log. f$.

Da der Beweis auf gleiche Weise geführt wird, so viele Faktoren b, c, d, e, . . . gegeben seyn mögen: so ist der Satz I. allgemein gültig.

Beweis von II. Unter derselben Voraussetzung, wie vorhin, ist der gesuchte Quotient q aus $\frac{b}{c}$ gleich $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (§. 40. 7.), folglich $x - y = \log. a^{x-y} = \log. q$, d. i. $\log. b - \log. c = \log. q$; was der Satz II. ausspricht.

Beweis von III. Unter derselben Voraussetzung ist $b)^n = a^x)^n = p$ (als der verlangten Potenz) $= a^{nx}$ (§. 53.); demnach $nx = \log. a^{nx} = \log. p$, d. ist $n. \log. b = \log. p$; was der Satz III. ausspricht

Beweis von IV. Unter derselben Voraussetzung ist $\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$ (§. 54.) $= r$ (als der gesuchten Wurzel). Also ist $\frac{x}{n} = \log. a^{\frac{x}{n}} = \log. r$, d. i. $\frac{\log. b}{n} = \log. r$; was der Satz IV. ausspricht.

Anmerkung. Dieselben Wahrheiten lassen sich nach Zus. 5. §. 136. noch etwas kürzer beweisen. Z. B. hinsichtlich des Satzes I. ist, wenn a die Basis des Systems ist, der Faktor $b = a^{\log. b}$

demnach √(a

findet. Set

$$\frac{2}{-7-\frac{}{14-}}$$

(wobey man

verwandeln):

$$\frac{18428}{2688};\ldots$$

daß man jetzt

det), oder res

Dieser 3te Th

gesuchten Wur

§. 70. A

satz 3. des §.

zustellen.

Auflösu

endliche Reihe

$x^2(x^2-y^2)-$

mittels der F

x^2 statt a, y^2

*) Wie schon

Burgos u

ächter vulgä

Ziffernre

das Geld vor dem Spiele = 70 fl. (= b). Dann nach dem Spiele noch 13, und B noch 58 fl. = fachen von 13 vermöge der Bedingung der Aufgabe. 13.4 = 52, und 58—52 = 6, also ergiebt sich al ein Fehler per defectum = 6 (= — d) wegen ieder zu klein angenommenen Zahl b. Es ist folg- e wahre Zahl $x = \frac{bc - ad}{c - d} = \frac{70.36 - 60.6}{36 - 6}$

$\frac{20 - 360}{30} = \frac{216}{3} = 72$ fl.

ie Rechnung nach vorstehenden Formeln wird be- d durch die folgenden Korrektionsformeln rzt, welche aus jenen so abgeleitet werden können: eichne d den geringsten Fehler, hervorgebracht durch nahme der Zahl b: so ist, wenn $b < x$, und die einerley Zeichen haben, $b + y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, raus $y = \frac{(b - a)d}{c - d}$ (= C); eben so hat man für die Gleichung $b - y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, und hier- $= \frac{(a - b)d}{c - d}$ (= C'). — Haben aber die Fehler ebene Zeichen: so hat man für $b < x$ die Gleichung $= \frac{bc + ad}{c + d}$, und hieraus $y = \frac{(a - b)d}{c + d}$ (= K); so für $b > x$ findet man $y = \frac{(b - a)d}{c + d}$ (= K'). un y die Korrektion vorstellt: so erhält man e, wenn man das Produkt aus der Diffe- der angenommenen Zahlen in den klein- Fehler entweder durch die Differenz oder ch die Summe beyder Fehler dividirt, je

auch log. x (b = y . log. a (b. Diese Gleichung zeigt klar die Regel des Verfahrens.

Sind aber für 1. und 2. die Grundzahlen der Systeme verschieden, wie wenn z. B. log. b (a und log. c (x zu addiren wären: so müssen diese Größen erst auf einerley Grundzahl gebracht werden, was so geschieht:

Nach §. 140. Zus. 6. 2. ist z. B. 2 = log. 100 (10 = log. 100^2 (100, folglich auch log. 100 (10 = log. 100^2 (100 = (durch Substit. für 2) log. $100^{\log. 100 (10}$ (100. Es muß nämlich allgemein die Zahl z nicht nur als Potenz der Basis x, als x^n, sondern auch als Potenz der Basis a des andern Systems, als $a^n)^y$ ausgedrückt werden; es ist folglich für dieselbe Basis a ny . log. a = n. log. x (Satz III.), oder $y = \frac{n.\ \log.\ x\ (a}{n.\ \log.\ a\ (a} = \log.\ x\ (a$ (weil log. der Basis a = 1). Daher ist allgemein die Zahl z = log. b (a = log. b^{y} (x = log. $b^{\log. x (a}$ (x. — Es ist folglich log. b (a + log. c (x + . . . = log. b (a + log. $c^{\log. a (x}$ (a + . . . oder = log. c (x + log. $b^{\log. x (a}$ (x.

Zusatz 2. Wenn man die beyden Seiten einer Gleichung, in welcher die unbekannte oder gesuchte Größe als Exponent vorkömmt, logarithmisch nach einerley System ausdrückt: so findet man nach den oben angeführten Vorschriften der Analysis leicht die Auflösung einer solchen Exponentialgleichung.

Ist z. B. $n^x = b - c$: so ist nach Satz III. x. log. $n = \log. (b - c)$, daher $x = \frac{\log. (b - c)}{\log. n}$. — Eben so hat man aus $\sqrt[x-m]{a^n} = b$ 1) $\frac{n.\ \log.\ a}{x - m} = \log.\ b$; daher 2) $n . \log. a = x . \log. b - m . \log. b$; folglich 3) $x = \frac{n.\ \log.\ a + m . \log. b}{(n.\ \log.\ b)}$. — Man habe ferner $a^{n^x} = b$.

Setzt man $n^x = y$, so ist $a^{n^x} = a^y = b$, folglich $y \cdot \log. a = \log. b$, und $y = \frac{\log. b}{\log. a}$, wie oben. Aber aus $n^x = y$ ist $x \cdot \log. n = \log. y = \log. \frac{\log. b}{\log. a}$ (nach Satz II.) $\log. \log. b - \log. \log. a$, daher $x = \frac{\log. \log. b - \log. \log. a}{\log. n}$, wo z. B. log. log. b den Logarithmus vom Logar. der Größe b, genommen aus demselben System, bedeutet. — In Beziehung auf §. 132. Zus. 5., wo man auch $n = \frac{\log. z + \log. e - \log. a}{\log. e}$ setzen kann: sey a und n einer geometrischen Progression aus den gegebenen Größen z, S, e zu finden. Man entwickle aus $S = \frac{ae^n - a}{e-1}$ den Werth für $a = \frac{eS - S}{e^n - 1}$, und substituire diesen in der Formel $z = ae^{n-1}$: so hat man $z = \frac{eS - S}{e^n - 1} e^{n-1}$, oder $e^n z - z = e^n S - e^{n-1} S$, oder $ee^n z - ez = ee^n S - e^n S$. Hieraus ist $ez = (ez - eS + S)e^n = [ez - (e-1)S]e^n$, also

$$n = \frac{\log. e + \log. z - \log. [ez - (e-1)S]}{\log. e}$$

$$= \frac{\log. z - \log. [ez - (e-1)S]}{\log. e} + 1.$$

Zusatz 3. Wenn z. B. zwischen 1 und 2 eilf Glieder so interpolirt werden sollen (§. 137.), daß diese 13 Glieder eine geometrische Progression bilden: so sucht man e aus $z = ae^{n-1}$; man findet $e = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$, daher

$$\log. e = \frac{1}{n-1} \log. \frac{z}{a} = \text{(in unserem Falle) } \frac{1}{12} \log. 2 = \frac{1}{12} \cdot 0,30103 = 0,0250858 \ldots.$$

Es ist aber jedes

rte Glied nach §. 104. Zuf. 4. = ae^{r-1}, daher der Logarithmus des rten Gliedes = log. a + (r − 1) log. e = (durch Subſtit.) log. 1 + (r − 1) . 0,02508 . . . Weil nun log. 1 = 0 (§. 137. Zuf. 2.) iſt, ſo darf man nur noch nach und nach ſtatt r ſetzen 2, 3, 4, . . . um die Logarithmen der einzuſchaltenden Glieder, und daher dieſe ſelbſt zu finden. So iſt der Logarithmus des 2ten Gliedes der Progreſſion = 0,0250858, und daher dieſes Glied = 1,059 . . . Der Logarithmus des 3ten Gliedes iſt = 0,0501716, und das geſuchte Glied = 1,122 . . . u. ſ. w.

Zuſatz 4. Da in dem gemeinen Logarithmenſyſtem die natürlichen Potenzen der Grundzahl 10 (wie 10, 100, 1000, . . . 10^n) ganze Zahlen (1, 2, 3, . . . n) ſind: ſo wird nur die Charakteriſtik des Logarithmus einer mit 10^n multiplizirten oder dividirten Zahl um n Einheiten vermehrt oder vermindert, die Mantiſſa aber bleibt ungeändert. So iſt z. B. log. 100 b = log. b + log. 100 = log. b + 2, und log. $\frac{b}{1000}$ = log. b − log. 1000 = log. b − 3. Oder allgemein: wenn log. b in ſeinen 2 Theilen der Charakteriſtik c und Mantiſſa M (§. 140. Zuf. 5.) ausgedrückt, d. i. log. b = c, M geſetzt wird: ſo iſt log. 10^nb = c, M + n oder = (c + n), M und log. $\frac{b}{10^n}$ = c, M − n.

Logarithmen unter der Form c, M − n werden halbnegative genannt. Dieſe Form iſt unweſentlich, wenn c = n oder > n iſt, indem dann (c − n), M einen gewöhnlichen +logar. wie 0, M oder d, M vorſtellt; man kann ſie daher ſowohl jedem Logarithmus, der ſie nicht hat, geben, oder, wenn ſie vorhanden iſt, mannigfaltig ändern, oder durch Subtraktion verſchwinden laſſen. So iſt z. B. der Logarithmus 4,0345 . . .

$-2 = 6{,}0345\ldots$ $-4 = 9{,}0345\ldots$ $-7 = 2{,}0345\ldots$ $= \log. \frac{10827}{100}$, indem $\log. 10827 = 4{,}0345\ldots$ (aus den gewöhnlichen Tafeln ist. Es ist aber $\frac{10827}{100}$ = der Dezimalzahl 108,27; also ist auch 2,0345... der Logarithmus von dieser Dezimalzahl. Man findet daher den Logarithmus von einer gegebenen Dezimalzahl, die einen vulgären unächten Bruch vorstellt, wenn man die Mantisse (0345...) wie zu einer ganzen Zahl (10827) sucht, und dieser diejenige Kennziffer vorsetzt, welche der in der Dezimalzahl enthaltenen ganzen Zahl (nach §. 140. Zus. 5.) entspricht.

Wenn hingegen $n > c$, d. i. wenn die nte Potenz von 10, als Divisor, größer ist, als der Dividend: so ist jene Logarithmenform $c, M - n$ wesentlich und gerade die, welche der Mathematiker in der Rechnung gewöhnlich beybehält, sie, wie wir vorhin zeigten, nach Belieben gültig verändernd. So ist der Logarithmus von $\frac{75}{100}$ (oder von 0,75) $= \log. 75 - \log. 100 = 1{,}87506\ldots$ -2, oder verändert, z. B. $= 4{,}875\ldots - 5$, oder $= 0{,}87506\ldots - 1$, so, daß also die vorige Regel, zu einer Dezimalzahl den Logarithmus zu finden, auch dann einzuhalten ist, wenn die Dezimalzahl einen vulgären ächten Bruch vorstellt. In der That verschleiert die Form $c, M - n$, oder die einfachste $0, M - n'$ (wie $0{,}87506\ldots - 1$) einen ganz negativen Logarithmus, welchem daher ein ächter, vulgär ausgedrückter, Bruch entspricht (§. 40. Zus. 4.); in unserem Beyspiele ist dieses der Bruch $\frac{3}{4}$ ($= 0{,}75$). Vollzieht man nämlich die in $0{,}875\ldots - 1$ angedeutete Subtraktion, indem man $0{,}875\ldots$ von 1 abzieht, und die Differenz mit $+$

setzt: so hat man —0,12494, d. i. einen ganz negativen Logarithmus. Nimmt man an, einem solchen Logarithmus, als +logar. betrachtet, entspreche die Zahl 1, z: so entspricht dem —logar. der ächte Bruch $\frac{1}{1, z}$. So findet man mittels der Tafel der gemeinen Logarithmen die dem Logarithmus +0,12494 zugehörige Zahl = 1,3334; also entspricht diesem —logarithmus die Zahl $\frac{1}{1,3334}$ = 0, 75 beynahe, wie es seyn muß.

Weil nun der Mathematiker bey seinen Rechnungen sich gewöhnlich der Dezimalbrüche, daher auch der halbnegativen Logarithmen bedient: so geht aus dem Gesagten die Regel hervor, wie man zu einem gegebenen vulgären ächten Bruche den halbnegativen Logarithmus finden könne. Man verwandle nämlich, wenn man leicht kann, den vulgären Bruch in einen gleichen Dezimalbruch (wie $\frac{1}{2}$ in 0,5), und verfahre dann nach obiger Regel; oder man vermehre die Kennziffer des Logarithmus des Zählers um n Einheiten, um den größeren Logarithmus des größeren Renners abziehen zu können, dem gefundenen Unterschiede aber setze man hinten jene n Einheiten mit — bey. Nach Satz II. ist z. B. log. $\frac{5}{9}$ = log. 5 — log. 9 = (nach den Tafeln) 0,6989700 — 0,9542425 = (den ersten Logarithmus vom letzten abgezogen) — 0,2552725. Weil nun dieser ganz negative Logarithmus offenbar z. B. = (+1 — 0,255 . . .) — 1 ist: so darf man ihn nur, um ihn zu vermeiden, von +1 oder 1,000 . . . abziehen, und der Differenz hinten — 1 beysetzen, wodurch man den halbnegativen Logarithmus 0,7447275 — 1 erhält. Kürzer geschieht dieses nach der gegebenen Regel, indem man, den Logarithmus des Zählers in der Kennziffer z. B. um 1 erhöhend, setzt:

1,6989700
−0,9542425

=0,7447275 — 1.

Das Erhöhen nämlich der Kennziffer des Logarithmus des Zählers um 1 ist eben soviel, als man hätte zuerst den Zähler mit 10 multiplizirt. Es ist aber allgemein $\log. \frac{b}{c} = (\log. b + \log. 10^n) - \log. c - \log. 10^n = (\log. 10^n . b + \log. c) - n$. Auf diese Weise wird demnach stillschweigend der Logarithmus von einem vulgären ächten Bruche in den Logarithmus des dem vulgären Bruche gleichen Dezimalbruches verwandelt.

Wie nun dem Bruche 0,75 der halbnegative Logarithmus 0,87506 . . . . — 1, und eben so dem Bruche 0,075 $\left(= \frac{75}{1000}\right)$ der Logarithmus 1,875 . . . — 3 oder (unter der einfachsten Form) 0,875 . . . — 2 entspricht: so entspricht umgekehrt einem halbnegativen Logarithmus unter der einfachsten Form 0, M — n eine zur Mantissa M gesuchte Zahl, welcher soviele Nullen vorgesetzt sind, wieviele Einheiten die abgezogene Zahl n enthält, inwiefern man die erste dieser Nullen die Ziffer der fehlenden ganzen Zahl bezeichnen läßt.

Zusatz 5. Da jede zusammengesetzte Zahl A ein Produkt aus lauter Primzahlen, m, n, p, . . . (§. 44.), folglich log. m + log. n + log. p + . . . = log. A (Satz 1.) in demselben Logarithmensystem ist: so erhellt, daß der Logarithmus einer jeden zusammengesetzten Zahl für irgend ein logarithmisches System bekannt sey, wenn in eben demselben die Logarithmen der Primzahlen bekannt sind. Weiß man umgekehrt den Logarithmus einer aus den einfachen Faktoren m, n zusammengesetz-

ten Zahl A und den Logar. der Primzahl m: so erkennt man auch vermöge Satz II. den Logarithmus des andern einfachen Faktors n, indem $\log. \frac{A}{m} = \log. A - \log. m = \log. n$ ist. So ist in dem gemeinen System z. B. log. 10 = 1; wüßte man nun noch log. 5; so hätte man auch log. 2 = log. 10 — log. 5, folglich auch log. 4 = 2 log. 2, daher auch log. 16 = 2 log. 4, und log. 32 = log. 16 + log. 2, u. s. w.

Wir sehen also, daß es bey Aufstellung des natürlichen, so wie irgend eines andern künstlichen logarithmischen Systems hauptsächlich darauf ankomme, die Logarithmen, wo nicht aller, doch der bey weitem meisten, Primzahlen aufzufinden oder zu berechnen. Wie man vorerst in Beziehung auf das natürliche System diesen Zweck erreichen könne, soll in Folgendem kurz dargestellt werden.

§. 142. Lehrsatz. In jedem System mit dem Modul = m ist

$$\log. (1+z) = m\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \ldots\right)$$

Beweis. Nach §. 138. Zus. 2. unter 6) ist $x = m\infty . y^{\frac{1}{\infty}} - m\infty$, wo x der Logarithmus von y mit dem Modul m ist. Setzt man daher statt y die Zahl $1+z$: so ist eben so $\log. (1+z) = m\infty (1+z)^{\frac{1}{\infty}} - m\infty$. Aber nach §. 65. Zus. 1. ist

$$(1+z)^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty} z + \frac{1-\infty}{2\infty^2} z^2 + \frac{1-\infty . 1-2\infty}{1.2.3.\infty^3} z^3 + \ldots$$

und $1-\infty = -\infty$, eben so $1-2\infty = -2\infty$, u. s. w.

folglich $(1+z)^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{z}{\infty} - \frac{z^2}{2\infty} + \frac{z^3}{3\infty} - + \ldots$

und $m\infty(1+z)^{\frac{1}{\infty}} - m\infty = m\infty + m(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \ldots) - m\infty$, also log. $(1+z) = m(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - + \ldots)$.

Zusatz 1. Setzt man daher $-z$ statt $+z$: so hat man 1) eben so

$$\log.(1-z) = m(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots)$$

oder $= -m(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \ldots)$. Daher 2) log. $(1+z) - \log.(1-z) = \log.\frac{1+z}{1-z} = 2m(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \ldots)$.

Zusatz 2. Es sey allgemein $z = n-1$, folglich $1+z = n$, und $m = 1$: so ist für das natürliche System allgemein

$$\lambda.n = (n-1) - \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)^4}{4} + \ldots$$

So ist $\lambda.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots$ ($= 0{,}62$, als nächste Summe dieser 6 Glieder).

Eine konvergentere Reihe erhält man dadurch, daß man $z = \frac{n-1}{n}$, demnach $\frac{1}{n} = 1 - z$ setzt, indem nun nach Zus. 1.

$$\lambda.\frac{1}{n} = -\left(\frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{2n^2} + \frac{(n-1)^3}{3n^3} + \ldots\right)$$ ist.

Aber $\lambda . \frac{1}{n} = 0 - \lambda . n$ (§. 141. II. mit §. 137. Zus. 2.), folglich

$$\lambda . n = \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{2n^2} + \frac{(n-1)^3}{3n^3} + \ldots$$

So ist $\lambda . 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 . 2^2} + \frac{1}{3 . 2^3} + \frac{1}{4 . 2^4} + \frac{1}{5 . 2^5} + \ldots$ (= 0,69, als nächste Summe dieser 5 Glieder).

Eine noch konvergentere und für die Rechnung bequemere Reihe erhält man, indem man $z = \frac{n-1}{n+1}$ setzt, woraus man entwickelt $n = \frac{z+1}{z-1}$, folglich ist nach Formel 2) im Zus. 1.

$$\lambda . n = 2\left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{(n-1)^3}{3\,(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5\,(n+1)^5} + \ldots\right),$$

daher $\lambda . 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 . 3^3} + \frac{1}{5 . 3^5} + \frac{1}{7 . 3^7} + \ldots\right)$.

Stellt man sich jeden der eingeschlossenen Brüche mit 2 multiplizirt vor: so hat jeder den Faktor $\frac{2}{3}$ gemein, und der Nenner jedes folgenden Bruches hat nebst dem ihm eigenthümlichen Faktor 3, 5, 7, ... noch den Faktor $3^2 = 9$ mehr, als der Nenner des unmittelbar vorhergehenden Bruches. Wenn man daher $\frac{2}{3} = 0,66666 \ldots$ hinsichtlich des 2. Bruches durch 9, den erhaltenen Quotienten q hinsichtlich des 3. Bruches wieder durch 9, den neuen Quotienten q′ wieder durch 9, u. s. f. dividirt: wenn man denn nach der Ordnung die Quotienten q, q′, q″, ... noch durch 3, 5, 7, 9, 11, ... dividirt: so erhält man den 2., 3., 4., ... in obiger Reihe vulgär geschriebenen Bruch in den ihm gleichen Dezimalbruch ausgedrückt. Die auf diese Weise auch nur bis auf 5 Dezimalstellen berechneten 4 Brüche sind 0,66666; 0,02469;

0,00165 und 0,00013, deren Summe = 0,69313 den natürlichen Logarithmus von 2 schon bis auf die 5. Dezimalziffer richtig giebt; wodurch denn der große Vorzug der allgemeinen, zuletzt angeführten, formularischen Reihe erhellt.

Zusatz 3. Sind mittels einer dieser formularischen Reihen z. B. die natürlichen Logarithmen der Primzahlen, so weit es nothwendig ist, berechnet: so erhält man vermöge §. 140. Zus. 2. auch die Logarithmen derselben Zahlen in jedem künstlichen System, dessen Modul m bekannt ist. So ist im Briggisch-Vlacq'schen System, wo $m = 0,43429 \ldots$ ist (§. 140. Zus. 4.), log. $2 = 0,69313 \ldots \times 0,43429 \ldots = 0,30102 \ldots$, welche Zahl wieder bis zur 5. Dezimalziffer, welche 3 seyn sollte, richtig ist.

Anmerkung. Die älteren Mathematiker, verlassen von den Hilfsmitteln, welche uns die Fortschritte der Mathematik zur Auffindung der Logarithmen darbieten, mußten, um zum Ziele zu kommen, den beschwerlichsten Weg einschlagen. Vorerst hatten sie für die zwischen 1 und 10 liegenden Primzahlen die Logarithmen zu suchen. Die Logarithmen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, oder $\frac{m}{n}$ für die Wurzelgrößen $\sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[n]{10^3} \ldots \sqrt[n]{10^m}$, welche lauter Irrationalzahlen sind, konnten von ihnen, indem sie die Logarithmen für ganze Zahlen suchten, nur insofern benutzt werden, als sie dienten, sich durch Fixirung derselben stufenweise dem gesuchten Logarithmus der Primzahl zu nähern.

Um nun z. B. den Logarithmus für die Primzahl 5 zu finden, fiengen sie ihres Systems willen mit der Wurzelausziehung aus $\sqrt{1 \cdot 10}$ an, und fuhren mit dieser Ausziehung aus den Produkten solcher Zahlen, zwischen welchen 5 liegt, so lange fort, bis sie auf die Zahl 5 wenigstens sehr nahe gekommen waren. Ihre Rechnung war diese:

	Zahlen	Logarithmen
$\sqrt{10.1} = 10^{\frac{1}{2}} = A$	$= 3{,}162277$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
$\sqrt{10.A} = 10^{\frac{3}{4}} = B$	$= 5{,}623413$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$
$\sqrt{A.B} = 10^{\frac{5}{8}} = C$	$= 4{,}216965$	$\frac{5}{8} = 0{,}625$
$\sqrt{BC} = 10^{\frac{11}{16}} = D$	$= 4{,}869675$	$\frac{11}{16} = 0{,}6875$

Nun liegt 5 nicht zwischen C und D, sondern zwischen D und B, also

	Zahlen	Logarithmen
$\sqrt{DB} = 10^{\frac{23}{32}} = E$	$= 5{,}232991$	$\frac{23}{32} = 0{,}71875$
$\sqrt{DE} = 10^{\frac{45}{64}} = F$	$= 5{,}048065$	$\frac{45}{64} = 0{,}703125$
$\sqrt{DF} = 10^{\frac{89}{128}} = G$	$= 4{,}958068$	$\frac{89}{128} = 0{,}6953125.$

. . . . . .

Erst bey der 22ten Wurzelausziehung kömmt man durch diese Operation auf die Zahl 5,000000, die bis in die 6te Dezimalstelle nicht von 5 unterschieden, und deren Logarithmus 0,6989700 ist. Diese Operation bis zur 26ten Wurzelausziehung fortgesetzt, findet man eine Zahl 5,0000000, deren Logarithmus 0,69897000 ist, d. h. man kann

$$5 = 10^{\frac{46896292}{67108864}} = 10^{0{,}69897000}$$ setzen.

§. 143. **Aufgabe. In einem Logarithmensysteme, in welchem nur für ganze aziffrige (z. B. 5ziffrige) Zahlen die Logarithmen berechnet sind, den Logarithmus einer mehrziffrigen (z. B. 9ziffrigen) Zahl n zu berechnen.**

Auflösung. Man drücke die vorgegebene Zahl n als Summe $b + c$ aus, deren erste Summande b jene aziffrige Zahl mit soviel angehängten Nullen, als der Ueberschuß der Anzahl Ziffern der Zahl n über die der Zahl a beträgt, — und deren andere Summande c, als ganze Zahl, die Ziffern der Zahl n enthält, an deren Stelle in b jene Nullen getreten sind. Z. B. die Briggisch-Vlacq'schen oder Vega'schen Logarithmentafeln ge-

ben die Logarithmen nur für 5ziffrige ganze Zahlen genau und unmittelbar; soll man daher für $n = 795716324$ den Logarithmus in eben diesem System finden: so setze man $n = 795710000 + 6324 = b + c$.

Dann verfahre man nach der Formel

$$\log.(b+c) = \log. b + 2m\left(\frac{c}{2b+c} + \frac{c^3}{3(2b+c)^3} + \frac{c^5}{5(2b+c)^5} + \ldots\right).$$

Beweis dieser Formel. Setzt man $\frac{b+c}{b} = \frac{1+z}{1-z}$ und entwickelt hieraus z: so findet man $z = \frac{c}{2b+c}$. Diesen Werth in der Formel 2) §. 142. Zus. 1. substituirt, hat man $\log. \frac{b+c}{b}$ oder $\log.(b+c) - \log. b = 2m\left(\frac{c}{2b+c} + \ldots \text{wie oben}\right)$, daher

$$\log.(b+c) = \log. b + 2m\left(\frac{c}{2b+c} + \ldots\right).$$

Wenn man für das obige Beyspiel bloß das erste Glied dieser Reihe, nämlich $\frac{2m.c}{2b+c} = \frac{0{,}86859 \times 6324}{1591420000+6324}$ (§. 140. Zus. 4.) $= 0{,}00000345147 \ldots$ beybehält: so findet man $\log. 795716324 = 8{,}9007548 +$ der vorigen Zahl $= 8{,}90075825147$, d. i. schon bis auf 11 Dezimalstellen sehr genau.

Zusatz. Setzt man in der vorigen Formel $-c$ statt $+c$: so hat man eben so allgemein log. $(b-c)$

$= \log b. - 2m \left(\frac{c}{2b-c} + \frac{c^3}{3(2b-c)^3} + \ldots \right)$. Dieser Formel bedient man sich mit Vortheil, wenn die auf die aziffrige Zahl folgende Ziffer > 5 ist. Wäre z. B. zu 795698467 der dieser Zahl im Briggischen System entsprechende Logarithmus zu suchen: so zöge man diese Zahl von 795699000 ab, setzte diese Zahl $= b$ und die gefundene Differenz $533 = c$.

Anmerkung. Jede gut eingerichtete Logarithmentabelle enthält die Vorschriften, wie man mit Hilfe der beygefügten Proportionaltheile zu einer gegebenen 7ziffrigen Zahl (wenn, wie in den Vegaischen Logarithmentafeln, die Mantissen der Logarithmen 7ziffrig sind) den entsprechenden Logarithmus, und umgekehrt zu einem, als Resultat der logarithmischen Rechnung, gegebenen Logarithmus eine zugehörige 7ziffrige Zahl leicht und hinlänglich genau finden könne. Da man mit so eingerichteten Tafeln in den bey weitem meisten Fällen vollkommen ausreicht: so soll hier nur noch die Frage beantwortet werden:

Welche Bewandtniß hat es mit den vorhin erwähnten Proportionaltheilen?

Es sey z. B. der Logarithmus 2,3056417 gegeben: so finde ich auf der Stelle die dazu gehörige Zahl von 5 Ziffern, nämlich 202, 13. Aber der Logarithmus dieser Zahl ist 2,3056308. Denke ich mir nun jene Zahl um 1 wachsen, nämlich 202, 14: so erhalte ich den nächst größeren Logarithmus 2,3056523. Beyder Logarithmen Unterschied ist nun 215; d. i. wächst jene Zahl um eine ganze Einheit: so wächst der Logarithmus um $\frac{215}{10 \text{ Mill.}}$; folglich beym Wachsen um $\frac{1}{10}$ nur um $\frac{21,5}{10. \text{ Mill.}}$; beym Wachsen um $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{10}$ . . . um 43,0; 64,5 . . . . Hieraus ergiebt sich die Tabelle:

Zunahme der Zahl um 1 Zehntb.	Zunahme des Logar. um
. . . . . 2 —	21,5
. . . . . 3 —	43,0
. . . . . 4 —	64,5
. . . . . 5 —	86,0
. . . . . 6 —	107,5
. . . . . 7 —	129,0
. . . . . 8 —	150,5
. . . . . 9 —	172,0
	193,5

Diese Proportionaltheile sind nun z. B. den Vegaischen Tafeln beygefügt, wobey jedoch immer die letzte Ziffer weggelassen, dafür aber, wenn die weggelassene $= 5$ oder > 5 war, die nächst vorhergehende um 1 vermehrt ist. So sind jene correspondirenden Zunahmen 22, 43, 65 u. s. w.

Nun ist der Unterschied zwischen dem Logarithmus von 202,13 und dem gegebenen 109; das Augment folglich der Zahl 202,13, welches dem Unterschiede entspricht, ist nach der Tafel der Proportionaltheile $>$ als $\frac{5}{1}$ und $< \frac{6}{10}$; weil nun aber 109 jenem näher kömmt: so wird die Ziffer 5 als 6te unserer Zahl angesehen; man hat daher 202, 135 u. s. w.

Aehnlich verfährt man im umgekehrten Falle.

§. 144. Erklärung. Wenn eine gegebene ganze oder zehntheilige Zahl b, deren höchste Ziffer den Generalwerth $10^{n}-1$ hat, von der Einheit der nächst höheren Ordnung d. i. von 10^{n} abgezogen wird: so heißt die gefundene Differenz C die dekadische oder arithmetische Ergänzung (complementum arithm.) der Zahl b.

So ist z. B. in der Zahl 23 die erste Ziffer 2 ihrem Generalwerthe nach ein Zehner; zieht man daher 23 von 100 ($=10^{2}$, der Einheit der 2. oder nächst höheren Ordnung) ab: so ist der Unterschied $= 77$ die dekadische Ergänzung $=$ C. Eben so erhält man diese von 4,68 . .,

indem man diese zehntheilige Zahl von 10 abzieht: nämlich C = 5,32 . . . .

Bezeichnet man allgemein die Zahl b unter Berücksichtigung des Generalwerthes 10^{n-1} ihrer höchsten Ziffer durch $b(10^{n-1}$: so ist allgemein die dekadische Ergänzung

$C.b = 10^n - b(10^{n-1}$.

§. 145. Lehrsatz. Die Subtraktion einer Zahl $b = b(10^{n-1}$ von einer Zahl a verwandelt sich in eine Addition der dekadischen Ergänzung C . b zur Zahl a, und man findet die wahre gesuchte Differenz d der 2 gegebenen Zahlen, wenn man von der vorigen Summe $a + C.b$ die Einheit der nten Ordnung, d. i. 10^n abzieht.

Beweis. Es ist offenbar $a - b$ oder $a - b(10^{n-1} = a + (10^n - b(10^{n-1}) - 10^n$; aber die eingeschlossene Größe ist nach §. 144. die dekadische Ergänzung der Zahl b, d. i. C . b, also ist $(a + C.b) - 10^n = d$.

So ist $86 - 23 = (86 + 77) - 100 = (163) - 10^2 = 63 = d$, welche Differenz sogleich durch Unterdrückung der ersten Ziffer 1 in der Zahl 163 gefunden wird. Eben so ist $3,75 - 4,68 = (3,75 + 5,32) - 10 = (9,07) - 10 = -0,93 = -(d)$.

Bemerkung. Wir wollen künftig die der Summe $a \pm C.b$ beyzugebende Zahl (-10^n) der Kürze wegen die Korrektion nennen.

Auch kann man, um bey allen diesen Rechnungen gleichförmig zu verfahren, den Exponenten n immer eine +zahl $= 1$ oder > 1 bedeuten lassen. Denn setzt man $n = 0$, so drückt $b(10^{n-1} = b(10^{-1}$ einen ächten Dezimalbruch, z. B. 0,3, aus (S. 61.), dessen arithmetische Ergänzung folglich $= 10^0 - 0,3 = 1 - 0,3 = 0,7$, die Korrektion also $= -1$ ist. Allein $0,7 - 1$ ist offenbar dasselbe, als $9,7 - 10$, d. i. als $(10^1 - 0,3) - 10^1$.

Zusatz 1. Es ist also auch

$\log. a - \log. b\ (10^{n-1} = (\log. a + C.\log. b) - 10^n$,

wenn 10^{n-1} den Generalwerth der höchsten Ziffer der Charakteristik des Logarithmus von b bezeichnet.

Da wir es in den Rechnungen höchst selten mit 11ziffrigen ganzen Zahlen zu thun haben, die Charakteristik folglich der Briggischen Logarithmen (§. 140. Zus. 5.), welcher wir uns in der Regel bedienen, meistens kleiner 10 ist, d. i. noch zu den Einern gehört: so gilt, weil hier n gewöhnlich $= 1$ ist, die Formel:

$$\log. a - \log. b = (\log. a + C.\log. b) - 10,$$

wobey man C.log.b dadurch schnell findet, daß man die letzte bedeutende Ziffer der Mantissa des in der Tabelle aufgesuchten Logarithmus von b, ohne diesen auszuschreiben, von 10, alle übrigen Ziffern aber gegen die Linke hin von 9 abzieht.

Beyspiel. Wenn man $\frac{1895,763}{332,59} = q$ setzt: so ist nach §. 141. II. $\log. q = \log. 1895,763 - \log. 332,59 = \log. 1895,763 + C.\log. 332,59 - 10$, und die Rechnung diese:

$$\begin{aligned} C.\log. 332,59 &= 7,4780908 - 10 \\ \log. 1895,763 &= 3,2777840 \\ \hline \log. q &= 10,7558748 - 10 \end{aligned}$$

d. i. $\log. q = 0,7558748$, welchem Logarithmus die Zahl $5,7 = q$ entspricht.

Zusatz 2. Gleichwie in $6 - (3 - 1)$ die dekadische Ergänzung $C = 10 - (3 - 1) = 11 - 3 = 8$, daher $6 - (3 - 1) = (6 + 8) - 10$ ist: eben so findet man diese Ergänzung C eines halbnegativen Logarithmus unter der einfachsten Form $0, M - n'$ (§. 141. Zus. 4.), indem man, der gleichförmigen Rechnung wegen, den Logarithmus $0, M$ von $10 + n'$ abzieht, und dann, wie

vorhin, die Korrektion — 10 beyschreibt. Allein da (10 + n′) — 10, wie (1 + n′) — 1, = n′ ist: so verfährt man in diesem Falle am kürzesten, wenn man den Logarithmus 0, M von n′ abzieht, ohne denn weiter eine Korrektion beyzugeben.

Beyspiel. Man will das vierte Glied der Proportion

$$0{,}075 : 255 = 4600 : x$$

logarithmisch berechnen, nämlich

log. x = log. 255 + log. 4600 — log. 0,075 (§. 141. I. II.), zugleich aber auch die angedeutete Subtraktion in Addition verwandeln. In diesem Falle ist 0, M — n′ = 0,8750613 — 2. Indem man also 0,875 ... bloß von 2 abzieht, hat man die dekadische Ergänzung = 1,1249387. Die Rechnung steht also so:

log. 255 = 2,4065402
log. 4600 = 3,6627578
C. log. 0,075 = 1,1249387
log. x = 7,1942367.

Diesem Logarithmus entspricht die 8ziffrige ganze Zahl 15640000 = x.

Zusatz 3. Soll man $\frac{a}{b^r}$, wo b^r eine reine Potenzirung, r also eine ganze +zahl bedeutet, logarithmisch ausdrücken: so hat man nach §. 141. II. III. log. a — r log. b. Setzt man wieder C. log. b statt log. b: so ist die gesuchte wahre Differenz allgemein

log. a — r . log. b = log. a + r (C . log. b — 10^n)
= log. a + r . C . log. b — r . 10^n,

d. i. man sucht zuerst C. log. b, indem man log. b von 10^n (wo n meistens wieder = 1) abzieht, diese dekadische Ergänzung dann mit dem Exponenten r der verlangten Potenz multiplizirt, und die Korrektion — r . 10^n beygiebt.

Allein dieselbe Differenz log. a — r. log. b ist auch

$$= \log. a + (10^n - r . \log. b) - 10^n,$$

d. i. man erhält dasselbe, wenn man zuerst log. b mit r multiplizirt, das Produkt von der Einheit der nächst höheren Ordnung (von 10^n) abzieht, und die Korrektion -10^n, wie gewöhnlich beyschreibt.

Beyspiel 1. $\frac{2}{35^3}$ ist, logarithmisch ausgedrückt,

$= \log. 2 - 3 . \log. 35 = \log. 2 + 3. C. \log. 35 - 3.10,$

die Rechnung also diese:

C. log. 35 = 8,4559320

× 3 = 25,3677960 — 30

log. 2 = 0,3010300

$\log. \frac{2}{35^3} \ldots = 25,6688260 - 30$

$= 0,6688260 - 5,$

daher denn $\frac{2}{35^3} = 0,0000466472 \ldots$ (§. 141. Zus. 4).

Es erhellt ferner, daß, wenn man vorerst log. 35 = 1,5440680 mit 3 multiplizirt, vom Produkte = 4,6322040 die dekadische Ergänzung = 5,3677960 genommen, und die Korrektion — 10 beygefügt hätte, das Resultat der Rechnung dasselbe gewesen wäre.

Beyspiel 2. Es ist eben so $\log. \frac{0,0075}{0,5^7} = \log.$ 0,0075 — 7. log. 0,5. Nun ist C. log. 0,5 = 0,3010300 (Zus. 2.), daher 7. C. log. 0,5 = 2,1072100 (ohne weitere Korrektion), und die Rechnung diese:

log. 0,0075 = 0,8750613 — 3

7. C. log. 0,5 = 2,1072100

$\log. \frac{0,0075}{0,5^7} = 0,9822713 - 1.$

Diesem Logarithmus entspricht die Zahl $0,96 = \frac{0,0075}{0,5^7}$.

Zusatz 4. Es sey $\frac{a}{\sqrt[r]{b}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{r}}} = q'$, wo r wieder eine ganze +zahl, daher $\sqrt[r]{b}$ eine reine Wurzelausziehung bezeichnet, logarithmisch ausdrücken. Nach §. 141. II. und IV. hat man $\log. q' = \log. a - \frac{\log. b}{r}$.

Setzt man nun statt $\frac{\log. b}{r}$ wieder $C. \frac{\log. b}{r} = (10^n - \frac{\log. b}{r})$: so ist allgemein

$$\log. q' = \log. a + C. \frac{\log. b}{r} - 10^n,$$

d. i. der Logarithmus von b wird vorerst durch den Exponenten r der Wurzel dividirt, vom Quotienten die dekadische Ergänzung, wie gewöhnlich, gesucht und dieser die Korrektion -10^n (wo n wieder meistens $= 1$) beygegeben.

Beyspiel. Für $\log. \frac{3600}{\sqrt[5]{7}} = \log. q'$ hat man die Rechnung:

$$\left.\begin{array}{l}\log. 7 = 0{,}8450980\\ : 5 = 0{,}1690196\end{array}\right\}$$

$$C. \frac{\log. 7}{5} = 9{,}8309804 - 10$$

$$\log. 3600 = 3{,}5563025$$

$$\log. q' = 3{,}3872829,$$

welchem Logarithmus die Zahl $2439{,}4 = \frac{3600}{7^{\frac{1}{5}}} = q'$ entspricht.

Zusatz 5. Ist daher der Ausdruck von gemischter

Form $ab^{-\frac{s}{r}} = \frac{a}{b^{\frac{s}{r}}} = \frac{a}{\sqrt[r]{b^s}} = q''$ logarithmisch zu geben: so hat man

$$\log. q'' = \log. a - \frac{s. \log. b}{r} = \log. a + C. \frac{s. \log. b}{r} - 10^n,$$

ganz, wie im Zus. 4., nur daß vorerst log. b noch mit dem Exponenten s der verlangten Potenz multiplizirt wird.

Beyspiel. Für $\log. \frac{3600}{\sqrt[5]{7^3}} = \log. q''$ ist die Rechnung diese:

$$\left.\begin{array}{l} 3. \log. 7 = 2,5352940 \\ : \quad 5 = 0,5070588 \end{array}\right\}$$

$$C. \frac{3. \log. 7}{5} = 9,4929412 - 10$$

$$\log. 3600 = 3,5563025$$

$$\log. q'' = 3,0492437.$$

Diesem Logar. entspricht sehr nahe die Zahl 1120,066... $= q''$.

Anwendung der Logarithmen.

Vorbemerkung. Zu den nützlichsten Erfindungen, die im Gebiete der Mathematik gemacht wurden, gehört unstreitig auch die der Logarithmen. Die Anwendung derselben ist nicht nur in der reinen höheren sowohl, als auch in der gesammten angewandten Mathematik, hinsichtlich des Standpunktes, den diese Wissenschaften in unseren Tagen gewonnen haben, unentbehrlich geworden, sondern sie gewährt auch in sehr vielen Rechnungsfällen, die zunächst das bürgerliche Leben im Staate, oder die aus diesem hervorgehenden mannigfaltigen Verhältnisse betreffen, den größten Nutzen. Nur einige der wichtigsten dieser Rechnungsfälle können hier einen Platz finden. Uebrigens zeigen schon die oben im §. 141. Zus. 2. und 3. vorgekommenen Beyspiele von der Nothwendigkeit

der logarithmischen Rechnungen auf dem Gebiete der reinen niedern Größenlehre.

§. 146. Aufgabe 1. Eine Stammgröße a wächst im ersten Jahre im geometrischen Verhältnisse b:c. Diesen Zuwachs i' zur Stammgröße a hinzugethan, wachse die neue Größe $a+i'$ im zweyten Jahre wieder in demselben Verhältnisse b : c, erhalte folglich einen Zuwachs i'', der zur vorigen Größe $a+i'$ hinzugethan. die Größe $(a+i')+i''$ hervorbringt. Diese neue Größe wachse denn im dritten Jahre wieder in demselben Verhältnisse b:c, u. s. f wie vorhin, für n Jahre.

Welche Größe S wird aus der Stammgröße a in n Jahren auf diese Weise erwachsen?

Auflösung. Man sieht leicht, daß man vorerst nur die Zuwüchse i', i'', . . . der den einzelnen Jahren entsprechenden Größen a, $a+i'$, $(a+i')+i''$, . . . zu bestimmen habe. Es stelle daher g eine dieser Größen und i den dieser Größe g in einem Jahre zugehörigen Zuwachs allgemein vor. Um i zu finden, wird man schließen: wenn die Einheit in einem Jahre wächst um den $\frac{c}{b}$ten Theil, um wieviel wächst in demselben Zeitraume die Größe g? Man hat also die Proportion

$$1 : g = \frac{c}{b} : i, \text{ folglich ist } i = \frac{c}{b} . g$$

der allgemeine Ausdruck des Increments i, d. i. man findet dieses, wenn man die entsprechende Größe, die den gesuchten Zuwachs in einem Jahre hervorbringt, nur mit $\frac{c}{b}$ multiplizirt. Es sey z. B. $g = 1000$ Gulden, welche in einem Jahre um $100 : 5$ ($= b : c$, d. i. um 5 fl. von jedem Hundert, oder kurz um 5 Procent) wachsen: so ist

dieser Zuwachs $i = \frac{5}{100} \cdot 1000 = \frac{1}{20} \cdot 1000 = 50$ fl.

Wüchsen nun jene 1000 fl. den Bedingungen unserer Aufgabe gemäß, so hätte man für das folgende Jahr die aus 1000 fl. erwachsene Größe $1000 + 50 = 1050$ fl., und ihren Zuwachs wieder $= \frac{1}{20} \cdot 1050$; u. s. w. Hieraus ist denn Folgendes in der Allgemeinheit verständig:

Nach	ist aus a erwachsen die Größe
1 J.	$a + \frac{c}{b} \cdot a = \left(1 + \frac{c}{b}\right) a = \left(\frac{b+c}{b}\right)^1 \cdot a.$
2 —	$\left(\frac{b+c}{b}\right)^1 \cdot a + \frac{c}{b}\left(\frac{b+c}{b}\right)^1 \cdot a = \left(\frac{b+c}{b}\right) \cdot a$ $\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+c}{b}\right)^2 \cdot a.$
3 —	$\left(\frac{b+c}{b}\right)^2 \cdot a + \frac{c}{b}\left(\frac{b+c}{b}\right)^2 \cdot a = \left(\frac{b+c}{b}\right)^3 \cdot a$
	(wie vorhin).
....	. . . . .
n Jahren	$\left(\frac{b+c}{b}\right)^{n-1} \cdot a + \frac{c}{b}\left(\frac{b+c}{b}\right)^{n-1} \cdot a =$ $\left(\frac{b+c}{b}\right)^n \cdot a,$

d. i. nach n Jahren ist aus der Stammgröße a die Größe

$$(I)\quad S = \left(\frac{b+c}{b}\right)^n \cdot a$$

erwachsen. Wenn n eine große Zahl ist: so wählt man für die Rechnung statt dieser Formel ihren logarithmischen Ausdruck

$$\log. S = n. \log. \frac{b+c}{b} + \log. a$$

oder $= n[\log. (b+c) - \log. b] + \log. a$ (§. 141. I. II. III.).

Beyspiel 1. Nimmt man die Einwohner eines Landes zu 90000 (= a) an, und setzt, daß sie jährlich im Verhältnisse 125 : 1 (= b : c) oder so zu nehmen, daß auf 125 Menschen jährlich einer Zuwachs kömmt: so giebt uns die Rechnung nach der vorstehenden Formel die Antwort auf die Frage: wie groß könnte des Landes Bevölkerung (= S) nach 100 (= n) Jahren seyn? Da hier $\frac{c}{b} = \frac{1}{125}$, oder $\frac{b+c}{b} = \frac{126}{125} = 1{,}008$ ist, so steht die Rechnung kurz so:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\log.\ \frac{b+c}{b} = \log.\ 1{,}008\end{array}\right\} = 0{,}0034605 \\ \times\ n\ (= 100) \qquad = 0{,}34605 \\ +\ \log.\ a = \log.\ 90000 \quad = 4{,}9542425 \\ \log.\ S = 5{,}3002925,\end{array}\right.$$

also S = 199660.

Beyspiel 2. Für einen Pupill legt der Vormund ein Kapital von 30000 (= a) auf Zins vom Zinse d. i. so an, daß die Zinsen jährlich wieder zum Kapital geschlagen werden. Wie groß wird dieses nach 12 Jahren seyn, wenn der Zinsfuß 4 Procent (oder der 25te Theil vom 100) ist?

Hier ist $\frac{b+c}{b} = \frac{26}{25} = 1{,}04$, und die Rechnung diese:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\log.\ \frac{b+c}{b} = \log.\ 1{,}04\end{array}\right\} = 0{,}0170333 \\ \times\ n\ (= 12) \qquad = 0{,}2043996 \\ +\ \log.\ a = \log.\ 30000 \quad = 4{,}4771213 \\ \log.\ S = 4{,}6815209,\end{array}\right.$$

also S = 48030,9.

Anmerkung. Diesen Fall ausgenommen, ist sonst im positiven Rechnen des Zinses vom Zinse (Anatocismus), gewöhnlich wurden hohe Zinsen, und zwar monatlich,

entrichtet; der Wucherer war demnach durch den Anatocismus leicht im Stande, den Schuldner bald um Gut und Freyheit zu bringen. Daher jenes Verbot.

Zusatz 1. Aus der logarithmisch ausgedrückten Formel (I) leitet man die Formel für n ab, nämlich

$$(II)\ n = \frac{\log. S - \log. a}{\log. \frac{b+c}{b}}.$$

Beyspiel. In wieviel Jahren wird α) die Bevölkerung im vorigen Beysp. 1., und β) daß Kapital im Beysp. 2. noch einmal so stark seyn?

Antwort. Da hier $S = 2a$ oder $\frac{S}{a} = 2$, daher $\log. S - \log. a = \log. 2$ ist: so darf man nur den Logarithmus von $2 = 0{,}3010300$ für α) durch den oben angeführten Logar. von 1,008, nämlich durch 0,0034605, und für β) durch 0,0170333 dividiren. Man findet im ersten Falle $n = 86{,}99\ldots$, und im andern Falle $n = 17{,}67$ Jahren.

Zusatz 2. Eben so leitet man aus der Formel (I) die folgende

$$(III)\ \log. a = \log. S - n . \log. \frac{b+c}{b}$$

ab, nach welcher sich wieder die Stammgröße a, wenn S, n und $\frac{c}{b}$ gegeben sind, berechnen läßt.

Beyspiel. A ist erst nach 4 Jahren verbunden, an B ein Kapital von 10000 fl. zu zahlen. A kann das Kapital im Handel zu 10 Procent benützen: welche Summe kann B fordern, wenn ihm das Kapital sogleich ausgezahlt wird?

Antwort. Wenn man 1) mit Rücksicht auf B, den Empfänger der Größe a, die Frage so stellt: welches ist

das Kapital a, das auf ähnlichen Zins vom Zinse gelegt, in 4 Jahren zur Summe S = 10000 fl. anwächst? so ist nicht nur klar, daß nach der aufgestellten Formel gerechnet werden müsse, sondern es erhellt auch zugleich, daß B, unter der Voraussetzung, daß er die ihm sogleich ausgezahlte Summe a eben so wie A die Summe S, benützen könne, sich, wie es seyn soll, nach Verlauf von 4 Jahren im Besitze der ihm nach dieser Zeit schuldigen 10000 fl. wirklich befinde, also keinen Schaden leide. — 2) Mit Rücksicht auf A, den Auszähler, ist durch obige Frage diese mitgegeben: wieviel darf A von den sogleich (d. i. vor den bedungenen 10 Jahren) auszuzahlenden 10000 fl. zurückebehalten, damit auch er nicht zu Schaden komme?

Die erste Frage nun wird durch folgende unserer Formel gemäße Berechnung

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{C.log.}\dfrac{b+c}{b}=\text{C.log.}\frac{11}{10}=\text{C.log. }1{,}1\end{array}\right\}=\ 9{,}9586073-10\\ \times n(=4)\end{array}\right\}=39{,}8344292-40$$

$$+\log. S = \log. 10000 \ldots = \underline{4, \ldots}$$

$$\log. a = 3, 8344292$$

dahin unmittelbar beantwortet, daß weil diesem Logarithmus die Zahl 6830, 13 = a entspricht, B nur eben diese (ihm sogleich auszuzahlende Summe) statt der 10000 fl. ansprechen könne. Hieraus folgt zugleich hinsichtlich der zweyten Frage, daß A, welcher das Kapital S diskontirt, die Größe = 10000 — 6830, 13 = 3169, 87 fl. (= S — a) für sich zurückebehalten dürfe. Diese Größe heißt der Rabatt oder das zusammengesetzte, auch Leibnitz'sche, Interusurium. Indem man nämlich die aus Formel (I) entwickelte Größe $a = \left(\frac{b}{b+c}\right)^n . S$ im Ausdrucke S — a für a substituirt, hat man die Leibnitz'sche Rabattformel

$$S - \left(\frac{b}{b+c}\right)^n . S, \text{ oder } \left(1 - \left(\frac{b}{b+c}\right)^n\right) . S,$$

nach welcher im Königreiche Sachsen noch gesetzlich gerechnet wird.

Anmerkung. Bey uns, wie in mehreren andern Staaten, wird nach der Hofmann'schen einfachen Rabattformel

$$S - \frac{bS}{b+nc}$$

gerechnet. Wenn nämlich $\frac{c}{b}$ das Wachsthum oder die Zunahme von 1 fl. in einem Jahre, also $\frac{c}{b} . n$ die Zunahme von 1 fl. in n J. ausdrückt, man folglich schließt: wenn $\left(1 + \frac{c}{b} . n\right)$ fl. vor n J. noch 1 fl. war, wieviel ist die Größe S vor eben diesem Zeitraume? — so hat man die Proportion

$$1 + \frac{c}{b} . n : 1 = S : a,$$

woraus man $a = \frac{S}{\frac{b+cn}{b}} = \frac{bS}{b+cn}$ entwickelt. Hier drückt S die Summe nach n Jahren, und $\frac{bS}{b+cn}$ ihren gegenwärtigen Werth = a nach dem einfachen Zinse allgemein aus. Diese letzte Größe also von S abgezogen, hat man die den einfachen Rabatt ausdrückende Formel. Wenden wir diese Formel auf unser voriges Beyspiel an: so finden wir $a = \frac{10 . 10000}{10+4} =$ 7142,86, folglich den Rabatt = 10000 — 7142 86 = 2857,14 um 312,73 geringer, als nach der Leibnitz'schen Formel. Diese Differenzen wachsen zum Nachtheile des Auszählers A noch mehr für größere n. Es erscheint daher weder der Gerechtigkeit noch Billigkeit angemessen, in wiefern das positive Recht durch Einhalten der Hofmann'schen Formel Verträge zernichtet, in welchen das Rechnen nach der Leibnitz'schen stipulirt ist.

Zusatz 2. Man leitet endlich aus der Formel (I) noch folgende ab:

$$\text{(IV)}\quad \log.\frac{b+c}{b} = \frac{\log. S - \log. a}{n},$$

und für den Fall, wo $S = 2a$ ist (Zus. 1.),

$$\text{(V)}\quad \log.\frac{b+c}{b} = \frac{\log. 2}{n}.$$

Beyspiel 1. Die V. Abhandl. im 2. Bd. „der Materialien zur Statistik der dänischen Staaten“ (Flensburg und Leipz. 1786) enthält die Angabe, daß sich Dännemarks Bevölkerung in ungefähr 118 Jahren verdoppelt habe. Wie groß war die jährliche Zunahme?

Antwort. Man sucht hier $\frac{c}{b}$ oder das geometrische Verhältniß b : c. Nach (V) hat man vorerst $\log.\frac{b+c}{b} = \frac{0,3010300}{118} = 0,0025511$. Diesem Logarithmus entspricht sehr nahe die Zahl $1,00589 = \frac{b+c}{b}$ $= 1 + \frac{c}{b}$; folglich ist $\frac{c}{b} = 1,00589 - 1 = 0,00589$ $= \frac{589}{100000} =$ (indem man den Zähler und Nenner durch 569 dividirt) $\frac{1}{170}$ beynahe. Es wäre demnach in den dänischen Staaten auf 170 Menschen jährlich einer Zuwachs gekommen, oder die Volksmenge hätte jährlich im Verhältnisse 170 : 1 zugenommen.

Beyspiel 2. Jakob kam mit 70 Personen nach Aegypten. Beym Auszuge nach 430 Jahren waren es mit den 5jährigen Kindern 660000 Menschen: wie stark mußte die jährliche Zunahme der Bevölkerung gewesen seyn?

Antwort. Nach (IV) hat man die Rechnung:

$$\log. S = \log. 660000 = 5{,}8195439$$
$$-\log. a = -\log. 70 = 1{,}8450980$$

$$\left.\begin{matrix}\log. S. - \log. a)\\ : n\,(=430)\end{matrix}\right\} = 3{,}9744459 = 0{,}0092429 = \log. \frac{b+c}{b};$$

also ist $\frac{b+c}{b} = 1{,}02151$, und, wie vorhin, $\frac{c}{b} =$ $0{,}02151 = \frac{1}{46}$ beynahe; d. i. auf 46 Menschen müßte jährlich 1 Mensch Zuwachs gekommen seyn, was mithin eine damalige äußerst große Fruchtbarkeit beurkunden würde.

§. 147. **Aufgabe 2.** Es komme zur Größe a, wie wir sie in der ersten Aufgabe §. 146. annahmen, jährlich noch eine andere Größe g unter denselben Bedingungen, wie a, entweder hinzu, oder von a hinweg: welche Größe S wird aus a und den aus den einzelnen Größen g entstehenden Summen nach n Jahren erwachsen?

Auflösung. Weil die Größe g, die am Ende des ersten Jahres addirt oder subtrahirt wird, unter denselben Bedingungen, wie a, aber nur ein Jahr weniger, als a, d. i. $n-1$ J. steht: so erwächst aus ihr nach §. 146. die Größe $\pm\left(\frac{b+c}{b}\right)^{n-1}$. g. Da ferner jedes folgende g immer um 1 Jahr weniger steht, als das unmittelbar vorhergehende g, für die aber am Ende des nten J. addirte oder abgezogene Größe g kein Wachsthum Statt findet: so erhellt, daß aus a und diesen einzelnen Größen g in n J. die Größe

$$S = \left(\frac{b+c}{b}\right)^n . a \pm \left(\frac{b+c}{b}\right)^{n-1} . g \pm \left(\frac{b+c}{b}\right)^{n-2} . g \pm \ldots \pm \frac{b+c}{b} . g \pm g$$

erwachse. Die mit dem konstanten Faktor g behafteten Glieder der 2. Seite dieser Gleichung bilden, rückwärts gelesen, eine geometrische steigende Progression, deren erstes Glied $= \pm g$; letztes Glied $= \pm \left(\frac{b+c}{b}\right)^{n-1} . g$, und deren Exponent $e = + \frac{b+c}{b}$, so daß also $e-1 = \frac{b+c}{b} - 1 = \frac{c}{b}$ ist. Demnach findet man die Summe aller dieser Glieder nach §. 132. Zus. 1.

$$= \left[\pm \left(\frac{b+c}{b}\right)^n . g \pm g\right] : \frac{c}{b} = \pm \frac{bg}{c} . \left(\frac{b+c}{b}\right)^n \mp \frac{bg}{c}.$$

Es ist also

$$S = \left(\frac{b+c}{b}\right)^n . a \pm \left[\frac{bg}{c} . \left(\frac{b+c}{b}\right)^n - \frac{bg}{c}\right].$$

Zusatz 1. So in der Allgemeinheit! Allein unsere Aufgabe ist von vorzüglichster Bedeutung für den besondern Fall, wo am Ende eines jeden Jahres die konstante Größe g weggenommen wird, und zwar inwiefern diese Größe g den Sinn einer Jahrs- oder Zeitrente (Annuität)*) erhält. Wenn nämlich A eine gewisse Summe Geldes = a, als Kapital, dem B (z. B. einer soliden Gesellschaft, oder einem ganzen Staate) unter der Bedingung anvertraut, daß eine jährliche Rente = g

*) Von der Annuität unterscheidet sich die Leib- oder Lebensrente dadurch, daß diese eine gewisse Summe g ist, die einer Person A nur auf Lebenszeit (A mag bald oder spät sterben) gezahlt wird.

ihm, oder seinen Erben, oder überhaupt denjenigen, an welche er den Bezug der Rente g abtritt, solange von B ausgezahlt wird, bis das Kapital a sammt dem bedungenen jährlichen Zinse aufgezehrt oder verschwunden ist. Ein solcher Vertrag heißt Annuitätsvertrag, B der Entrepreneur, A der Rentenier, das Kapital a der Einsatz (mise), und die hier einschlagende Rechnung Annuitätsrechnung.

Da nun für diese Rechnung das untere Zeichen in der für S aufgestellten Formel gilt: so geht diese durch Reduktion in folgende über:

$$S = \left(\frac{b+c}{b}\right)\left(a - \frac{bg}{c}\right) + \frac{bg}{c}.$$

Soll aber das Kapital a mit den erwachsenden Zinsen endlich verschwinden: so muß die Zeitrente größer, als der bedungene Zins von a im ersten Jahre, d. i. $g > \frac{c}{b}.a$ (§. 146.) seyn. Demnach ist auch, wenn man jede Größe des letzten Ausdruckes mit $\frac{b}{c}$ multiplizirt, $\frac{bg}{c} > a$, der Faktor also $a - \frac{bg}{c}$ in obiger Formel eine —zahl. Um nun diese zu vermeiden, wird die Formel unter der bequemsten Form so gegeben:

$$(I)\ S = \frac{bg}{c} - \left(\frac{b+c}{b}\right)^n \left(\frac{bg}{c} - a\right),$$

nach welcher man indessen wegen des Zwischenzeichens — nur zum Theile logarithmisch rechnen kann.

Beyspiel. A bezieht gegen ein an B zu 4 Prozent hingegebenes Kapital a zu 50000 fl. die Annuität $g = 3000$ fl., welche Summe S wird nach 30 Jahren übrig seyn?

Antwort. Da hier $\frac{c}{b} = \frac{1}{25}$, daher $\frac{b+c}{b} =$

$\frac{26}{25} = 1{,}04$, und $\frac{bg}{c} - a = 25.3000 - 50000 = 25000$ ist: so hat man, wenn das letzte Glied unserer Formel $= v$ gesetzt, und dasselbe logarithmisch berechnet wird,

$$\left.\begin{array}{l}\log.\ \frac{b+c}{c} = \log.\ 1{,}04 \\ \times n\,(=30)\end{array}\right\} = 0{,}0170333$$
$$= 0{,}5109990$$
$$+\log.\left(\frac{bg}{c} - a\right) = \log.\ 25000 = 4{,}3979400$$
$$\log.\ v = 5{,}9089390.$$

Diesem Logarithmus entspricht die Zahl 81084,7 $= v$; diese folglich von $\frac{bg}{c}$ d. i. von 75000 abgezogen, bleibt die —differenz 6084,7, welche zeigt, daß der Rentenier A nach 30 Jahren nicht nur nichts mehr vom Entrepreneur B zu fordern habe, sondern auch dessen Schuldner geworden sey. — Ein Lehrstück für leichtsinnige Menschen, welche wähnen, ihr sich so gut und sicher rentirendes Vermögen sey nicht leicht zu verschwenden!

Zusatz 2. Weit nützlicher, als unsere Formel (I) im Zus. 1., sind folgende Formeln, welche das für ein etwas großes n überaus lästige Staffelrechnen (wie man es nannte) überflüssig machen.

Nämlich für den Fall, daß durch den Bezug der Annuität g der Einsatz a sammt den erwachsenden Zinsen verzehrt, also $S = 0$, folglich statt der Formel (I) (durch bloße Versetzung der Glieder) $\frac{bg}{c} = \left(\frac{b+c}{b}\right)^n \left(\frac{bg}{c} - a\right)$ ist, entwickelt man hieraus, indem man vorerst $\frac{bg}{c} - a$ auf einerley Nenner bringt, dann c wegläßt und durch b dividirt, leicht die einfachste Formel

$$(II)\quad n = [\log. g - \log.\left(g - \frac{c}{b}a\right)] : \log.\ \frac{b+c}{b}.$$

Beyspiel. B schuldet an A eine Kapitalsumme von 20000 Gulden; der bedungene Zins ist 5 Prozent. A erbietet sich die Rückzahlung auf diese Weise von B anzunehmen, daß dieser jährlich die bestimmte Summe von 1000 fl. zu entrichten versichert, wogegen denn A nur $3\frac{1}{2}$ Prozent statt 5 anrechnen will. In wieviel Jahren wird auf diese Art das schuldige Kapital sammt Zins abgetragen seyn?

Antwort. Hier ist ist $\frac{c}{b} = \frac{3\frac{1}{2}}{100} = \frac{7}{200}$, daher $\frac{b+c}{b} = \frac{207}{200} = 1{,}035$, und $g - \frac{c}{b}.a = 1000 - \frac{7.20000}{200} = 300$. Demnach ist die Rechnung diese:

$$\log. g = \log. 1000 = 3, \ldots$$
$$-\log.(g - \frac{c}{b}.a) = \log. 300 = 2{,}4771213$$
$$\log. g - \log.(g - \frac{c}{b}.a) = 0{,}5228787.$$

Es ist ferner $\log. \frac{b+c}{b} = \log. 1{,}035 = 0{,}0149403$, folglich $n = \frac{0{,}5228787}{0{,}0149403} = 35$ Jahren beynahe.

Anmerkung. Ich habe in meiner Abhandlung »Einige Aufgaben über Schuldentilgung mit ihren Auflösungen« (Würzburg 1818) Seite 5. 6. die Formel (II) direkt deduzirt. Diese direkte Deduktion hat vor der indirekten (an diesem Orte gegebenen) den Vorzug, daß sie klar einsehen läßt, daß weder in diesem Beyspiele das Kapital a, noch der Einsatz im vorigen Beyspiele (Zus. 1.) zugleich auf Zins vom Zinse, auf welchen die Formel zu sprechen scheint, wirklich stehe, daß vielmehr in beyden Beyspielen von der Summe a und von jedem nach Abzuge der gezahlten konstanten Größe g bleibenden Kapitalreste nur der einfache bedungene Zins gezahlt werde. Der Grund aber, warum aus beyden, ganz verschieden scheinenden, Deduktionen dieselbe Formel hervorgeht, ist dieser: Will nach der indirekten Deduktion der Gläubiger A vom Schuldner B Zins vom

Zinse fordern: so ist dieselbe Forderung auch dem B hinsichtlich aller einzelnen, vor dem letzten oder nten Jahre gezahlten, Summen g gestattet; dann aber hebt sich, wie man leicht einsieht, die Rechnung des Einen gegen die des Andern hinsichtlich des Zinses vom Zinse auf.

Zusatz 3. Aus obiger Gleichung (im Zus. 2.), nämlich aus $\frac{bg}{c} = \left(\frac{b+c}{b}\right)^n \left(\frac{bg}{c} - a\right)$, findet man, indem man vorerst mit $\frac{bg}{c} - a$ multiplizirt, die Formel

$$(III)\quad a = \frac{bg}{c} - \frac{bg}{c}\left(\frac{b}{b+c}\right)^n.$$

Beyspiel. Die Benützung eines Waldes durch Verkauf des 6 Jahre hindurch zu gewinnenden Holzes beträgt jährlich 600 fl.: welches Kapital a, zu 4 Prozent angeschlagen, kann gegen die 6jährige Benützung des Waldes verlangt werden?

Antwort. Da hier $\frac{c}{b} = \frac{1}{25}$ oder $\frac{b}{c} = 25$, folglich $\frac{b}{b+c} = \frac{25}{26}$, und $\frac{bg}{c} = 25.600 = 15000$ ist: so hat man zuerst in Beziehung auf das letzte Glied $\frac{bg}{c}\left(\frac{b}{b+c}\right)^n = v$ die Rechnung:

$$\left\{\begin{array}{l} \log.\ b = \log.\ 25 = 1{,}3979400 \\ +\,C.\log.(b+c) = C.\log.26 = 8{,}5850267 - 10 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}9829667 - 1 \\ \times n\,(=6) \qquad\qquad = 0{,}8978002 - 1 \end{array}\right.$$

$$+\ \log.\ \frac{bg}{c} = \log.\ 15000 = 4{,}1760913$$

$$\log.\ v = 4{,}0738915.$$

Diesem Logarithmus entspricht die Zahl 11854,7 = v; daher diese Zahl von $\frac{bg}{c}$ oder 15000 abgezogen, hat man

das Kapital a = 3145,3 fl. Diese Summe als Einsatz betrachtet, findet man wieder nach Formel (II), daß man eine Rente g = 600 fl. auf 6 Jahre zu beziehen fordern könne.

Anmerkung. Ein Vertrag dieser Art, durch welchen nämlich ein Kapital gegen die jährliche Nutzung eines Unterpfandes (Αντίχρησις) gegeben wird, heißt antichretischer Vertrag (pactum antichreticum).

Zusatz 4. Aus der Formel (III) entwickelt man für g die Formel

$$(IV)\quad g = a : \left[\frac{b}{c} - \frac{b}{c}\left(\frac{b}{b+c}\right)^n\right].$$

Beyspiel. A will ein zu 5 Prozent aufgenommenes Kapital a = 8000 fl. in 10 Jahren in gleichen Zahlungsraten abtragen: wie groß muß diese jährlich zu zahlende Summe g seyn?

Antwort. Da hier $\frac{c}{b} = \frac{1}{20}$, folglich das zweyte Glied (p) des Divisors = log. 20 + 10 . log. $\frac{20}{21}$ ist: so steht vorerst die Rechnung so:

$$\left\{\begin{array}{rl} & \log.\ 20 = 1{,}3010300 \\ + & \text{C. log. } 21 = \underline{8{,}6777807 \quad -10} \\ & \log.\ \frac{20}{21} = 0{,}9788107 \quad -1 \\ \times & 10 = 0{,}788107 \quad -1 \\ + & \log.\ 20 = \underline{1{,}301030} \end{array}\right.$$

$$\log.\ p = 1{,}089137.$$

Die diesem Logarithmus entsprechende Zahl p = 12,27826 vom ersten Gliede $\frac{b}{c}$ (= 20) des Divisors (d) abgezogen, ist dieser = 7,72174; daher log. g = log. a — log. d = 3,9030900 — 0,8877152 = 3,0153748, demnach g = 1036,036 fl.

Zusatz 5. Bey den vier, in den vorstehenden Zusätzen aufgestellten, Formeln sowohl, als in den zur Er-

läuterung und Anwendung dieser Formeln gegebenen Beyspielen wurde jedesmal das Verhältniß b : c, in welchem die Stammgröße a wächst, oder der bedungene Zins der Kapitalsumme a berücksichtiget. Allein man kann auch von diesem Zinse, weil er für jedes Jahr leicht zu berechnen ist, wegsehen, und die Aufgabe, durch einen speziellen Fall versinnlicht, so stellen:

Der Staat B, welcher an A die Summe a = 50 Millionen Gulden schuldet, entwirft zur allmähligen Rückzahlung den festen Plan, jährlich die bestimmte Summe g = 300000 fl. abzutragen, und in jedem folgenden Jahre überdieß diejenige Summe beyzulegen, die ihm der jährliche Zins à $2\frac{1}{2}$ Prozent von dem jedesmal Gezahlten abwerfen würde, oder die er ohnedieß zahlen müßte, wenn er nichts am Kapitale a abtrüge: in wieviel Jahren wird auf diese Art das Kapital a abgetragen seyn?

Da in diesem Falle wegen der beständigen Beylegung des Zinses von dem jedesmal gezahlten die konstante Größe g als Zins vom Zinse bringend betrachtet werden muß: so erhellt klar, daß die oben §. 147. in Beziehung auf die einzelnen g für n Jahre aufgefundene Summe, nämlich $\frac{bg}{c} \cdot \left(\frac{b+c}{b}\right)^n - \frac{bg}{c} = a$ seyn müsse, indem mittels jener Summe dieses Kapital a in n Jahren abgetragen seyn soll.

Um nun aus dieser Gleichung die Formel für n zu entwickeln, verfährt man auf folgende Art: es ist 1) $\frac{bg}{c} \cdot \left(\frac{b+c}{b}\right)^n = a + \frac{bg}{c}$; 2) $\frac{bg \cdot (b+c)^n}{b^n} = ac + bg$; folglich 3) log. bg + n . log. (b + c) − n . log. b = log. (ac + bg), daher denn

$$(V)\quad n = \frac{\log.(ac+bg) + C.\log.bg}{\log.(b+c) - \log.b}.$$

Die durch das angeführte Beyspiel bedingte Rechnung nach dieser Formel ist folgende:

Weil hier $\frac{c}{b} = \frac{2\frac{1}{2}}{100}$, folglich $b + c = 102{,}5$; ac $= 125000000$, und $bg = 30000000$ ist: so hat man

$\log.(ac + bg) = \log. 155000000 = 8{,}1903317$

$C.\log. bg = C.\log. 30000000 = 2{,}5228787 - 10$

$\log.(ac + bg) + C.\log. bg \ldots = 0{,}7132104.$

$\log.(b + c) = \log. 102{,}5 = 2{,}0107239$

$-\log. b = -\log. 100 = 2, \ldots$

$\log.(b + c) - \log. b = 0{,}0107239.$

Also $n = \frac{0{,}7132104}{0{,}0107239} = 66{,}5$ sehr nahe, oder in so viel Jahren ist jene Schuldenlast von 50 Mill. getilgt.

Wenn man zur konstanten Größe g, hier 300000 fl., den von 50 Mill. schuldigen Zins (à $2\frac{1}{2}$ Prozent), nämlich 1250000 fl. rechnet: so hat der Staat B am Ende des ersten Jahres die Totalsumme von 1550000 zu zahlen. Allein ganz dieselbe Totalsumme zahlt er auch in jedem folgenden Jahre, indem ein Theil jenes Zinses als schuldiger Zins für das jedesmal bleibende Kapital, der andere Theil aber, der konstanten Größe g beygelegt, zur Tilgung der Schuldenlast verwendet wird. Die Kraftanstrengung des Staates ist folglich durchaus eine konstante. Wer diesen Umstand ins Aug faßt, dem wird nicht nur die Wichtigkeit nnserer Aufgabe klar, sondern er erblickt auch das seltene Wirken eines anscheinend schwachen Hebels, der bey konstanter Kraft eine immer größere Last mit immer wachsender Geschwindigkeit emporhebt.

Zusatz 6. Aus der Formel (V) leitet man die nützliche Formel für g ab, nämlich:

$$(VI)\quad g = ac : \left[\frac{(b+c)^n}{b^{n-1}} - b\right].$$

Beyspiel. Man will 50 Mill. Gulden, den Zins à 3 Prozent gerechnet, in 25 Jahren auf obige Weise (Zuf. 5.) abtragen: wie groß muß die beſtändige Größe g gewählt werden?

Antwort durch die Rechnung nach (VI), welche dieſe iſt:

$n.\log.(b+c) = 25.\log.103 = 50{,}3209300$

$-(n-1)\log.b = 24.\log.100 = 48{,}\ldots$

$2{,}3209300 = \log. 209{,}3774.$

Alſo $\dfrac{(b+c)^n}{b^{n-1}} - b =$

$209{,}3774 - 100 = 109{,}3774.$

$\text{Log. ac} = \log. 150000000 = 8{,}1760913$

$-\log.\left(\dfrac{(b+c)^n}{b^{n-1}} - b\right)$

$= -\log. 109{,}3774 = 2{,}0389276$

$\log. g = 6{,}1371637;$

mithin $g = 1371400$ ſehr nahe. (Man vergleiche übrigens S. 14 bis 16. meiner oben cit. Abhandl.)

Achter Abschnitt.

Die elementare Combinationstheorie.

§. 148. **Erklärung.** Die Combinationslehre, im weitesten Sinne genommen, ist die Wissenschaft der Ordnung, welche bey den verschiedenen Arten, gegebene Dinge zusammenzustellen, beobachtet werden kann.

Die gegebenen Dinge (Zahlen, Buchstaben, Wörter, Farben, Karten, Personen, . . .) heißen die Elemente der Combination, und der Inbegriff mehrerer zusammengestellter Elemente heißt Form oder Complexion.

§. 149. **Hypothese.** Die allgemeinste Bezeichnung der Elemente ist die durch Zahlen, so daß jede Zahl die Stelle angiebt oder zählt, welche jedes Element unter den gegebenen Dingen einnimmt. Sind z. B. die gegebenen Elemente die Buchstaben a, b, b, c, d: so werden diese durch 1, 2, 2, 3, 4, in welchem Falle das wiederholte Element b für ein einzelnes steht, bezeichnet. Man wählt auch sonst die Buchstaben selbst als Zeichen der gegebenen Dinge, indem man jene so setzt, wie sie im Alphabete aufeinander folgen, was man das regelmäßige Anordnen der Elemente nennt.

Die wiederholten Elemente kann man wie Potenzen bezeichnen, so daß die Zahl, die angiebt, wie oft ein solches Element gesetzt sey, der Wiederholungsex-

ponent genannt wird: so sind in ab^3c^2d die Zahlen 3 und 2 Wiederholungsexponenten.

§. 150. Erklärung. Die Aufsuchung und Darstellung aller möglichen combinatorischen Formen oder Complexionen (§. 148.) gegebener Elemente, heißt die combinatorische Operation.

§. 151. Eintheilung. Die combinatorische Operation ist ursprünglich und wesentlich entweder Permutation, oder Combination (in engerem Sinne). Jene stellt alle möglichen Complexionen dar, die durch bloße Versetzung derselben gegebenen Elemente, die sich mithin alle in jeder Form wieder vorfinden, Statt haben; — diese sucht alle möglichen Formen auf, die entstehen können, wenn man eine verschiedene Anzahl der gegebenen Elemente zusammenfaßt. Sind z. B. 2 Dinge, bezeichnet durch 1, 2 oder a, b, gegeben: so hat man durch Permutiren die möglichen Complexionen 12, 21, oder ab, ba. Sind 3 Dinge 1, 2, 3 oder a, b, c gegeben: so giebt die Permutation die 6 möglichen Formen:

123, 213, 312, 132, 231, 321, oder abc, bac, cab, acb, bca, cba.

Allein die Combination giebt in letztem Falle die Formen: 1, 2, 3, oder a, b, c; dann die Formen: 12. 13, 23, oder ab, ac, bc; dann die Form: 123, oder abc.

Die aus der Permutation und Combination zusammengesetzte combinatorische Operation, welche die durch Combination entstandenen Formen permutirt, heißt Variation. So giebt die Variation noch zu den obigen Formen 12, 13, 23 die Formen: 21, 31, 32, und zu der Form 123 noch die Formen: 132, 213, 231, 312, 321 durch Permutation.

Noch unterscheidet man die Combination mit Wiederholungen von der reinen Combination, und die Variation mit Wiederholungen, oder

(was dasselbe ist) die Combination mit Wiederholungen und Versetzungen von der reinen Variation. So giebt die reine Combination die Formen: 12, 13, 23, aus 3 Elementen; die Combination mit Wiederholungen fügt zu jenen Formen noch diese: 11, 22, 33, und zu diesen giebt die Permutation noch überdieß die Formen: 21, 31, 32, so daß durch die Variation mit Wiederholungen 9 Complexionen erzeugt werden.

§. 152. Erklärung. Die Anzahl der aus den gegebenen Dingen combinirten Elemente heißt der Index oder Exponent der Combination. Sind z. B. 4 Dinge a, b, c, d gegeben, so zeigt der Exponent 2 die Verbindung von je zwey dieser Dinge (Combination im engsten Sinne), durch welche nämlich die Complexionen ab, ac, ad, bc, bd, cd entstehen; — der Exponent 3 zeigt die Verbindung von je drey dieser Dinge (Conternation), nämlich abc, abd, acd, bcd; — der Exponent 4 zeigt die Conquaternation, u. s. w. an. Man spricht auch: man combinire nach 2, 3, . . . und überhaupt n Dinge nach m. Die Erzeugnisse aus den Verbindungen nach den Exponenten 2, 3, 4, 5, 6 . . . werden resp. Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), Quaternionen (Quaternen), Quinionen (Quinternen), Senionen, u. s. w. genannt. Für den Index 1 und 0 hat man die fingirten Formen der Unionen a, b, c, d, . . . und der Nullionen (nach Leibnitz, Ollionen), indem man gar keines der Elemente setzt.

Die durch Combination oder Variation entstandenen Formen pflegt man nach Klassen zu benennen, deren Zahl der Exponent der Verbindung bestimmt; so bilden die Unionen die erste, die Ternionen die dritte, die Quinionen die fünfte Klasse, u. s. w.

Die Ordnung jeder Klasse pflegt man durch das Anfangszeichen a, b, c, . . . oder 1, 2, 3, . . . zu unterscheiden; so gehören z. B. alle Amben aus den gegebenen Elementen a, b, c, d, e oder 1, 2, 3, 4, 5, die mit a oder 1 anfangen, wie ab, ac, ... oder 12, 13 ... zur Ordnung a oder 1; alle Amben, die mit b oder 2 anfangen, wie bc, bd, . . . oder 23, 24, . . . zur Ordnung b oder 2.

Weiter unterscheidet man Gattung und Art der Complexionen. So sind diese von einerley Gattung, wenn sie in der Anzahl der verschiedenen Elemente und im Exponenten miteinander übereinstimmen, wie aaa, bbb, . . . oder aab, bbc, . . . oder wie $1^2 2^4 3^3$ und $1^2 6^3 7^4$, . . . Die combinatorischen Formen sind ferner von einerley Art oder ähnlich, wenn sie nur in der Folge derselben Elemente verschieden sind, wie abc, bac, cab, ... und zwar werden diese Formen zweynamige (binomiales), dreynamige (trinomiales) und überhaupt vielnamige (polynomiales) genannt, je nachdem die Anzahl der verschiedenen Elemente, aus welchen sie bestehen, entweder 2 oder 3,... ist, die Elemente selbst mögen wiederholt, oder ganz verschieden seyn. Z. B. an den Formen aaa, aab, aac, abb, abc, acc, sämmtlich zur Ordnung a gehörend, unterscheidet man 3 Gattungen dieser Ordnung; die erste enthält nur ein Element, aber dieses 3mal wiederholt; von dieser Gattung hat man hier die einzige Art aaa; die zweyte Gattung hat 2 verschiedene Elemente a, b und a, c mit 4 Arten aab, aac, abb, acc; die dritte Gattung enthält 3 verschiedene Elemente, und zwar hier von einer einzigen Art abc; dieser ähnliche Formen wären acb, bac, . . . Endlich kommen in jenem Beyspiele 4 zweynamige Arten oder Formen a^2b, a^2c, ab^2, ac^2 und eine dreynamige Form abc vor. Der allgemeine Ausdruck einer vielnamigen Complexion ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon$ ...

§. 153. Zahl der Complexionen heißt die Zahl, welche angiebt, wieviel Formen entweder jede einzelne Klasse oder alle Klassen zusammen haben. So ist z. B. 4 diese Zahl der Unionen aus 4 verschiedenen Elementen a, b, c, d; die Zahl der reinen Amben (ohne Wiederholung und Versetzung — §. 151.) ist 6; die Zahl der reinen Ternen ist 4, und die Zahl der Quaternen eben so ist 1, folglich die Zahl aller combinator. Formen = 15.

Die Zahl der ähnlichen Formen, die das bloße Versetzen erzeugt, fällt mit der Zahl der Permutationen zusammen, und heißt auch zuweilen der Polynomial- oder Infinitinomialcoeffizient.

§. 154. Hypothese, das Anordnen der Elemente betreffend.

Die Ordnung, in welcher man die durch die combinatorischen Operationen entwickelten Formen darstellt, ist entweder lexicographisch, oder arithmographisch, je nachdem man jene Formen entweder wie die Wörter in einem Lexicon, oder wie die Zahlen in ihrem System an einander reiht. Sind z. B. die Formen:

2134, 123, 321, 2143, 15, 1243, 134, 22, 32, 13, 35, 4, 243

lexicographisch zu ordnen: so läßt man 1) alle Formen von der Ordnung 1, 2, . . . (§. 152.) stufenweise aufeinander folgen, wodurch man erhält

123, 15, 1243, 134, 13|2134, 2143, 22, 243|321, 32, 35|4.

2) reiht man unter diesen Formen diejenigen aneinander, welche mit 12, dann mit 13, . . . anfangen, dadurch hat man

123, 1243|134, 13|15||2134, 2143|22|243||321, 32, 35||4.

Wenn man 3) unter diesen Formen diejenigen aufeinander folgen läßt, welche mit 12, 122, 123, . . ., dann mit 13, 132, 133, . . . u. s. w.; dann mit 21, 212, 233,

. . . 221, 222, 223 . . . u. s. w. anfangen: so sind alle Formen lexicographisch geordnet, nämlich:

123, 1243, 13, 134, 15|2134, 2143, 22, 243|32, 321, 35|4.

Will man ebendieselben Formen arithmographisch ordnen: so läßt man erst die einziffrigen, dann die zweyziffrigen, . . . Zahlen nach ihrem höheren Werthe aufeinander folgen; auf diese Art hat man

4|13, 15, 22, 32, 35|123, 134, 243, 321|1243, 2134, 2143.

Es erhellt, daß es leichter sey, arithmographisch zu ordnen, wenn das lexicographische vollendet ist, als umgekehrt zu verfahren.

I.

Von der Permutation.

§. 155. **Aufgabe. Die durch Versetzung von 4 gegebenen verschiedenen Elementen 1, 2, 3, 4 möglichen Complexionen aufzufinden und geordnet darzustellen.**

Auflösung. Dem ersten Elemente füge man das zweyte am Anfange und am Ende bey; hiedurch hat man 1.2 = 2 Formen, nämlich 21, 12. Zu jeder dieser beyden Formen geselle man am Anfange, in der Mitte und am Ende das dritte Element; hiedurch entstehen 1.2.3 = 6 Formen, nämlich 321, 231, 213 | 312, 132, 123. Wenn man endlich das vierte gegebene Element im Anfange, in die 2 Zwischenstellen und am Ende einer jeden jener 6 Complexionen setzt: so erhält man 1.2.3.4 = 24 Formen, nämlich:

(321)

4321, 3421, 3241, 3214;

(213)

4213, 2413, 2143, 2134;

(132)

4132, 1432, 1342, 1324;

(231)

4231, 2431, 2341, 2314;

(312)

4312, 3412, 3142, 3124;

(123)

4123, 1423, 1243, 1234.

Auf diese Weise findet man sicher und schnell alle möglichen Permutationsformen gegebener Elemente auf. Um diese Formen zu ordnen, stellt man sie zuerst nach Ordnungen (§. 153.) zusammen; dadurch erhält man, indem man obige Formen überschaut und zugleich die Formen als die ersten auswählt, welche z. B. das Anfangselement 4 haben, die folgende Anordnung:

1) 4321, 4231, 4213, 4312, 4132, 4123;
2) 3421, 3241, 3214, 3412, 3142, 3124;
3) 2431, 2341, 2314, 2413, 2143, 2134;
4) 1432, 1342, 1324, 1423, 1243, 1234.

Ordnet man nun jede dieser Formen, von der Ordnung 1 anfangend, z. B. arithmographisch, was leicht ist: so hat man der Aufgabe Genüge geleistet. Die Formen z. B. von der Ordnung 1, arithmographisch geordnet, sind:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432.

Zusatz 1. Aus der vorigen Darstellung der Permutationsformen ist klar, daß zwischen der ihrem numerischen Werthe nach niedrigsten Form 1234 und der höchsten 4321 alle übrigen 22 Formen liegen. Man kann daher alle diese zwischenliegenden Formen auch so auffinden: man bilde 1) die Formen von der Ordnung 1 dadurch, daß man von der niedrigsten Form 1234 ausgeht, jedes der auf 1 folgenden Elemente, vom letzten angefangen, um eine Stelle vorwärts setzt, und bey der zuletzt neu entstandenen Form den vorigen Akt nochmals wiederholt. Hiedurch hat man aus 1234 die Formen 1243, 1324 und 1342 (indem man den ersten Akt wiederholt). 2) Man versetze nun das letzte Element 4 um zwey Stellen (was hier einzig in Beziehung auf 4 möglich ist), und wiederhole denselben ersten Akt; hiedurch hat man noch aus 1234 die Formen 1423 und 1432.

Indem man nun 3) das zweyte Element gegen das erste versetzt, so hat man die niedrigste Form 2134 von

der Ordnung 2; verfährt man denn mit dieser, wie vorhin mit 1234: so findet man a) die Formen 2143, 2314, 2341; b) 2413, 2431, alle arithmographisch geordnet. U. s. w.

Zusatz 2. Sind 5 Elemente 1, 2, 3, 4, 5 gegeben, hinsichtlich welcher denn 12345 die niedrigste, und die rückwärtsgeschriebene 54321 die höchste Form ist: so kann man auf ähnliche Art, wie im Zus. 2., alle zwischenliegenden Formen, arithmographisch geordnet, darstellen, wie folgendes Schema für die Formen von der Ordnung 1 zeigt:

12345	13245	14235	15234
12354	13254	14253	15243
12435	13425	14325	15324
12453	13452	14352	15342
12534	13524	14523	15423
12543	13542	14532	15432

§. 156. Lehrsatz. Die Permutationszahl für n verschiedene gegebene Dinge ist

$$1.2.3.4\ldots n-2.n-1.n$$

Beweis. Man setze, diese Formel sey wahr für (n—1) verschiedene Dinge, deren Permutationszahl also sey 1.2.3...n—2.n—1: so wird die Formel auch die Permutationszahl für n Elemente ausdrücken. Denn wenn zu den (n—1) gegebenen Elementen noch eines oder das nte kömmt: so kann dieses, wie wir im §. 155. sahen, am Anfange und am Ende jeder einzelnen, aus den (n—1) Dingen erhaltenen, Permutationsform, dann aber auch n—2 Zwischenstellen in derselben Form einnehmen. Also giebt es für das nte Ding in jeder einzelnen Form 2+(n—2), d. i. n neue Stellen, mithin entstehen aus jeder einzelnen Permutationsform der (n—1) Dinge n Permutationsformen durch den Hinzutritt des nten Dinges. Man erhält folglich offenbar

die Permutationszahl für n verschiedene Elemente, wenn man die für (n—1) Dinge gültige Permutationszahl noch mit n multiplizirt.

Nun ist aber für (n—1), z. B. für 5—1 oder 4 gegebene verschiedene Elemente obige Formel der Permutationszahl, nämlich 1.2.3 . . . n—2.n—1, vermöge §. 155. gültig; folglich giebt diese Formel, mit n = 5 multiplizirt, die wahre Permutationszahl, wenn zu jenen 4 Dingen noch ein 5tes hinzukömmt. Ist die Formel aber gültig für 5 oder (6 — 1) Dinge, so ist sie auch gültig für (6—1)+1, d. i. für 6 Dinge, u. s. w. ins Unendliche; es drückt also die gegebene Formel die wahre Permutationszahl allgemein für n verschiedene gegebene Elemente aus.

Beyspiel. Die 6 Worte „una salus victis, nullam sperare salutem“, oder „amicus Plato, sed magis amica veritas“ können 1. 2. 3. 4. 5. 6, d. i. 720mal, und die 24 Buchstaben des lateinischen Alphabets 620448··· 401733·· 239439· 360000 mal versetzt werden.

Zusatz 1. Wenn daher unter den n gegebenen Dingen nach der Formel $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots$, wo $\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots = n$, einerley Elemente vorkommen: so drückt die Formel

$$\frac{1.2.3.4\ldots n-2.n-1.n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots.}$$

die Permutationszahl für diesen Fall aus. Es stellt nämlich der Zähler dieses Bruches die Permutationszahl richtig vor, inwiefern man sich die n Dinge als verschieden denkt. Allein diese Zahl vermindert sich, wenn z. B. $\alpha = 3$ ist, man folglich statt 1.2.3 verschiedener Permutationsformen nur die einzige Form aaa hat, um das (1.2.3)fache. Eben so, wenn β z. B. = 4 ist, und die 4 Elemente verschieden wären, würden diese für sich

1.2.3.4 Permutationsformen geben; aber wegen $b^\beta =$ bbbb gelten diese 24 Formen nur für eine $= \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4'}$ oder die durch den Zähler obigen Bruches ausgedrückte Permutationszahl muß um das 1.2.3.4, d. i. um das 24fache vermindert werden. U. s. w.

Stellt man sich für $\alpha = 3$ den Zähler obiger Formel wirklich durch 1.2.3 dividirt vor: so fängt er mit dem Faktor 4 an, oder, die Faktoren rückwärts gelesen, endet er mit dem Faktor $4 = \alpha + 1$; woraus erhellt, daß obige Formel auch so könne gegeben werden:

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.... \alpha+1}{1.2...\beta.1.2...\gamma.1.2...\delta....}.$$

Beyspiel. Wieviel Versetzungen leiden die 9 Buchstaben des Wortes „Studiosus“?

Antwort. Da dieses Wort drey s und zwey u enthält: so hat man nach der ersten Formel $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3 \times 1.2}$ und eben so nach der zweyten fürzeren Formel $\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2} = 30240$, d. i. soviel Versetzungen oder Anagramme jenes Wortes sind möglich.

Zusatz 2. Auf ähnliche Weise muß die Permutationszahl $= 1.2.3...n-2.n-1.n$ um das nfache vermindert, oder durch n dividirt werden, wenn die Bedingung Statt findet, daß 1 Element unter den gegebenen eine unveränderte Stelle einnehmen soll, indem dieses nte Element, wie die übrigen $(n-1)$ Dinge, permutirbar gedacht, die für diese $(n-1)$ Dinge Statt findende Permutationszahl auch um das nfache vermehrt hätte. Eben so muß jene Formel, für n verschiedene versetzbare Dinge geltend, durch $n-1.n$ dividirt werden, wenn 2 der gegebenen Elemente einen unveränderten

Platz behaupten sollen. Wenn z. B. jede aus a, b, c, d, e entstehende Permutationsform mit ab anfangen soll: so hat man nur $\frac{1.2.3.4.5}{4.5} = 6$ Complexionen durch Permutation.

Zusatz 3. Es hält daher nicht schwer, die richtige Permutationszahl gegebener Elemente zu finden, wenn die in jenen beyden Zusätzen betrachteten Fälle zugleich Statt finden sollen. So ist z. B. für a, b, c, d^2, e, f, g^3, wenn a, b, c eine unveränderliche Stelle haben, z. B. als abc immer am ersten Platze stehen sollen, die

$$\text{Permutationszahl} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2 \times 1.2.3 \times 8.9.10} = 420.$$

II.

Von der Combination*).

§. 157. Aufgabe. Aus n gegebenen verschiedenen Elementen alle Combinationsformen von den Unionen an zugleich mit Wiederholungen zu finden und gut geordnet darzustellen.

Auflösung. Die n gegebenen Elemente seyen 1, 2, 3, 4, 5 . . . Eben diese, in derselben Ordnung angesetzt, sind zugleich die Unionen. Um nun 1) die Binionen oder Amben mit Wiederholungen zu finden, setze man allen Unionen das erste Element vor, eben so den Unionen von 2 angefangen das 2te, — den

*) Ueber die Anwendung der Zeichencombination nach Leibnitz's Ideen hat neuerlich Chr. Aug. Semler in seiner Schrift »Versuch über die combinatorische Methode, ein Beytrag zur angewandten Logik und allgem. Methotik« (2te Aufl. Dresden 1822) Vieles, der Beherzigung und Prüfung werthes, gesagt.

Unionen von 3 angefangen das 3te Element, u. s. w. Dadurch hat man 11, 12, 13, 14, 15|22, 23, 24, 25|33, 34, 35|44, 45|55. — Um 2) die Ternionen oder Ternen mit Hilfe der Binionen zu finden, setze man allen Binionen das erste Element vor; dann den Binionen, die mit 2 anfangen, bis zur letzten Binion, das 2te; dann eben so den Binionen, die mit 3 anfangen, das 3te Element, u. s. w. bis das letzte 3mal wiederholt ist. Auf diese Weise hat man 111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 155|222, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 244, 245, 255|333, 334, 335, 344, 345, 355|444, 445, 455|555. — Auf ganz gleiche Weise findet man mit Hilfe dieser gebildeten Ternionen auch die Quaternionen, wie alle höheren Combinationsformen, welche, wie man sieht, zugleich gut geordnet sind, indem zur Rechten eines jeden Elements kein kleineres, als es selbst ist, steht.

Zusatz 1. Will man nur die reinen Amben, Ternen, ... haben: so läßt man aus jenen Formen die durch Wiederholung entstandenen weg, oder man bildet vorerst die Amben auch unmittelbar dadurch, daß man jedes gegebene Element, vom ersten angefangen, stufenweise jedem folgenden vorsetzt, nämlich setzt: 12, 13, 14, 15|23, 24, 25|34, 35|45. Wenn man eben so jede dieser Amben, von der ersten angefangen, jedem Elemente, welches auf das letzte Element der treffenden Ambe folgt, vorsetzt, so weit es die Anzahl der Elemente gestattet: so bildet man mit Hilfe der reinen Amben die reinen Ternen. Man hat nämlich in Beziehung auf die Ambe 12 die Ternen 123, 124, 125, hinsichtlich der Ambe 13 die Ternen 134, 135; hinsichtlich der Ambe 14 die Terne 145; weiter eben so die Ternen 234, 235; dann 245; endlich 345 (für 5 gegebene Elemente). Hieraus findet man eben so die reinen Quaternionen 1234, 1235|1245|1345|2345. Die einzige Quinion ist 12345.

Auch hält es nicht schwer, eine bestimmte Klasse die-

ser Complexionen unabhängig von den früheren oder für sich zu bilden, z. B. die Klasse der Ternen, was man durch $\overset{5}{c.}$ (1, 2, 3, 4, 5) bezeichnen kann. Nämlich die 3 ersten Elemente, wie sie aufeinander folgen, geben die niedrigste reine Tern 123; das letzte Element 3 mit jedem folgenden, soweit es die Anzahl der Elemente erlaubt, vertauscht, hat man 124, 125. Wenn denn in 123 das Element 3 um 1 Stelle vorgerückt und ihm das folgende Element rechts beygesetzt wird: so findet man 134 und durch Vertauschung, wie vorhin, noch 135. In 134 abermals 4 um eine Stelle vorgerückt, und das folgende Element beygesetzt, hat man 145, und hiemit alle Ternen der Ordnung 1. — Die erste oder niedrigste, zur Ordnung 2 gehörige Terne ist 234, das Element 4 gegen jedes folgende vertauscht, hat man hier noch 235. In 234 das Element 4 um eine Stelle vorgerückt und das unmittelbar folgende beygesellt, hat man 245, und hiemit alle reinen Ternen der Ordnung 2. Auf gleiche Weise findet man die Ternen jeder folgenden Ordnung, und zwar gut geordnet, da keinem größeren Elemente rechts ein kleineres, als es selbst ist, folgt.

Zusatz 2. Es macht keinen wesentlichen Unterschied, wenn unter den n gegebenen Elementen einerley Dinge sind. Z. B. man soll für 1, 1, 1, 22, 3 alle Klassen der Complexionen ohne Wiederholungen bilden. Man hat $\overset{1}{c.} = 1, 2, 3$; $\overset{2}{c.} = 11, 12, 13|22, 23$; $\overset{3}{c.} = 111, 112, 113|122, 123|223$; $\overset{4}{c.} = 1112, 1113|1122, 1123|1223$.

§. 158. Aufgabe. Aus n gegebenen verschiedenen Elementen alle Variationsformen zugleich mit den Wiederholungen zu finden und gut geordnet darzustellen.

Auflösung 1. Man bilde vorerst nach §. 157. alle Complexionen der verschiedenen Klassen, und permutire

dann jede Compleeion nach §. 155., wenn und sooft es möglich ist.

Beyspiel. Für die 3 Elemente 1, 2, 3 sind die Amben mit Wiederholungen 11, 12, 13, 22, 23, 33; durch Permutation von 12, 13, 23 hat man noch die Formen 21, 31, 32. Die Ternen sind 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333; durch Permutation von 112 entstehen die Formen 121, 211; von 113 die Formen 131, 311; von 122 die Formen 212, 221; von 123 die Formen 132, 213, 231, 312, 321, u. s. w.

Auflösung 2. Man füge jeder Union 1, 2, 3 jedes einzelne Element nach der Ordnung bey, um die 2te Klasse der Variationsformen mit Wiederholungen zugleich zu finden. Man hat auf diese Weise 11, 12, 13|21, 22, 23|31, 32, 33. Eben so erhält man die 3te Klasse jener Formen, indem man jeder der vorigen Formen wieder jedes einzelne Element vorschreibt, nämlich: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133|211, 212, . . . 233|311, 312, . . . 333.

Die Beweise dieser Auflösungen erhellen von selbst, so wie auch die Art des Verfahrens für mehrere gegebene Elemente klar ist. Wenn übrigens keine Wiederholungen Statt finden sollen: so verfährt man wie im §. 157. Zus. 1.

§. 159. Lehrsatz. Die Zahl der Variationsformen nach m aus n verschiedenen Dingen mit Wiederholungen ist durch die Formel n^m gegeben.

Beweis. Jedes einzelne Element aus den gegebenen n Dingen läßt sich mit sich selbst und mit jedem der übrigen Elemente, also nmal verbinden, oder es entstehen auf diese Weise n.n Verbindungen nach 2, oder n^2 Binionen. So, wenn z. B. 4 Elemente a, b, c, d gegeben sind, giebt das erste Element a, indem es

mit sich selbst, dann mit jedem der 3 übrigen Dinge zusammengenommen wird, 4 Binionen aa, ab, ac, ad. Allein was von a gilt, gilt auch von b und c und d; folglich geben die 4 Elemente 4.4 oder 4^2 Binionen.

Man kann sich ferner jede der n^2 Binionen mit jedem einzelnen Elemente der n Dinge verbunden denken, folglich entstehen $n^2.n$ Verbindungen nach 3 oder n^3 Ternionen. So giebt die erste Binion aa die 4 Ternionen aaa, aab, aac, aad; es entstehen daher aus den 16 Binionen 16.4 oder 4^3 Ternionen.

Da nun dieselbe Schließart in Ansehung jeder höheren Klasse der Complexionen wiederkehrt: so ist evident, daß aus n verschiedenen Dingen, nach m verbunden, n^m Variationsformen mit Wiederholungen entstehen.

Beyspiel. Mit 3 oder 5 Würfeln, deren jeder 6 Augen hat, sind 6^3 oder 6^5, d. i. 216 oder 7776 verschiedene Würfe möglich.

Zusatz. Wenn man alle Zahlen jener Variationsformen der Klasse 1, 2, 3, . . . bis zur Klasse mit dem m^{ten} Variationsexponenten m, d. i. bis c. addirt: so ist die Zahl aller Variationsformen aller Klassen $= n^1 + n^2 + n^3 \ldots n^m = \frac{(n^m - 1).n}{n-1}$ (§. 132. Zus. 1.).

§. 160. Lehrsatz. Die Zahl der Variationsformen nach m aus n verschiedenen Dingen, aber ohne Wiederholungen, ist durch die Formel

$$n.n-1.n-2.n-3 \ldots . (n-m+1)$$

oder $n.n-1.n-2.n-3 \ldots . n-(m-1)$

gegeben.

Beweis. Wegen Nichtgestattung der Wiederholung desselben Elements darf jedes einzelne Element nur mit jedem einzelnen der (n — 1) übrigen Elemente zusammen-

genommen werden, wodurch man also nur n(n—1) Binionen erhält. So giebt das Element a aus 5 Dingen a, b, c, d, e, verbunden mit jedem der übrigen 4 Dinge, nur die 4 Binionen ab, ac, ad, ae. Dasselbe gilt auch von b, c . . ., folglich geben die 5 Dinge nur 5.(5—1), d. i. 20 Binionen.

Ferner eine jede Binion, wie ab, mit jedem der übrigen (n—2) Elemente verbunden, giebt (n—2) Ternionen; also geben die n.(n—1) Binionen (n.n—1. n—2) Ternionen. So giebt die Binion ab die 3 Ternionen abc, abd, abe; eben so die Binion ac die 3 Ternionen acb, acd, ace, u. s. w. folglich erhält man aus 5 verschiedenen Dingen 20 . (5 — 2) = 20 . 3 = 5.4.3 Ternionen. Dieselbe Schließart für noch höhere Klassen zeigt von der Gültigkeit der aufgestellten Formeln, deren jede nämlich die Zahl aller Complexionen ausdrückt, welche theils durch reine Combination nach m, theils durch Permutation jeder der reinen Complexionen entstehen.

Zusatz. Für m = n findet nur eine Complexion durch Combination, aber 1.2.3...m—1.m verschiedene Formen durch Permutation Statt (§. 156.).

§. 161. Lehrsatz. Die Zahl der reinen Combinationsformen (ohne Wiederholungen und Versetzungen) nach m von n gegebenen verschiedenen Elementen ist bestimmt durch die Formel:

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.... (n-m+1)}{1.2.3.4...m}.$$

Beweis. Man setze die im Lehrsatze ausgedrückte Zahl = N. Nun läßt jede einzelne reine Complexion von m Dingen 1.2.3... m—1.m verschiedene Complexionen durch Permutation zu (§. 160. Zus.), folglich ist die Anzahl aller dieser Complexionen = (1.2.3...

$m-1 . m) . N = n . n-1 . n-3 \ldots (n-m+1)$
(§. 160.), daher denn

$$N = \frac{n . n-1 . n-2 \ldots (n-m+1)}{1 . 2 . 3 \ldots m}.$$

Zusatz 1. Diese Zahl N der reinen Combinationsformen nach m aus n Dingen ist also der mte Coefficient (oder der Coefficient des allgemeinen Gliedes) der Potenz $(a+b)^n$ (man sehe oben S. 123.).

Zusatz 2. Also ist aus n verschiedenen Elementen, z. B. den 90 Zahlen des Lotto's, die Anzahl

im Allgemeinen	nach dem Beyspiele
1. der Unionen $= \frac{n}{1} \ldots = \frac{90}{1} = 90$ (Auszüge);	
2. der Amben $= \frac{n . n-1}{1 . 2} \ldots = \frac{90 . 89}{1 . 2} = 4005$;	
3. der Ternen $= \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} \ldots = \frac{90 . 89 . 88}{1 . 2 . 3} = 117480$;	
4. der Quaternen $= \frac{n . n-1 . n-2 . n-3}{1 . 2 . 3 . 4} = \frac{90 . 89 . 88 . 87}{1 . 2 . 3 . 4} = 2555190$.	
u. s. w.	u. s. w.

Eben so findet man, daß z. B. 5 Nummern 10 Amben und eben so 10 Ternen, u. s. w. geben. Wer daher im Zahlenlotto ein Ambo setzt, hat 10 gewisse Ambo für sich und 4005—10, d. i. 3995 ungewisse Ambo gegen sich, welche letztere nämlich gleichsam zu Gunsten der Bank spielen, oder es verhält sich hier das Gewisse zum Ungewissen, wie 10 : 3995 = 1 : 399½. Wäre daher Billigkeit in dem Lottospiele, als einer Art Wette, so müßte die Bank gegen 1 Kreuzer des Spielenden 399½ Kr. zur Gegenwette setzen. Allein sie bietet nur 270 Kr. Auf gleiche Weise verhalten sich die gewissen Ternen zu den ungewissen, wie 10 : 117480—10, d. i. wie 1 : 11747, oder die Bank sollte 11747 Kr. gegen 1 Kr. des Spielenden setzen; sie setzt aber nur 5300 Kr., also mehr als

die Hälfte zu wenig zur Gegenwette. U. s. w. Es herrscht also bey diesem Spiele (Lotto di Genua) durchaus keine Billigkeit.

Beyspiel 2. Die 5 Stücke a, d, n, u, S in Beziehung auf die arithmetische — oder a, e, n, z, S in Beziehung auf die geometrische Progression lassen $\frac{5.4.3}{1.2.3}$ = 10 Ternen zu; also sind in beyden Fällen nur 10 verschiedene Aufgaben möglich (vergl. §. 125. Zus. 2. und §. 132. Zus. 5.).

Beyspiel 3. Die 6 Stücke des Dreyeckes (3 Seiten und 3 Winkel) lassen $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ = 20 Ternen zu, daher haben im Allgemeinen für die Trigonometrie, welche lehrt, aus 3 gegebenen Stücken die übrigen durch Rechnung zu finden, 20 Aufgaben Statt.

Beyspiel 4. Die 40 Karten im L'ombre lassen 40 Combinationen nach 9, also $\frac{40.39....32}{1.2....9}$ oder 273438880 verschiedene Spiele zu. Die Wahrscheinlichkeit, daß beyde Aß sich in 9 Karten befinden, geht aus der Vergleichung der Amben, welche 40 Karten geben, mit denen aus 9 Karten hervor. Nämlich $\frac{9.8}{1.2}$ = 36, und $\frac{40.39}{1.2}$ = 780; also jene Wahrscheinlichkeit = $\frac{36}{780}$ = $\frac{1}{21}$ beynahe.

Zusatz 3. Es ist die Zahl aller reinen Complexionen von der Klasse 1 bis zur Klasse m

$$= \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1.2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} + \ldots + \frac{n.n-1.....(n-m+1)}{1.2....m}$$

(§. 61. mit Zus. 2.). Aber

$(1+1)_n$ $(=2^n)$, nach der Binomialformel entwickelt, ist $=1+\frac{n}{1}+\frac{n.n-1}{1.2}+\ldots+\frac{n.n-1\ldots.(n-m+1)}{1.2\ldots m}$, folglich ist jene Anzahl reiner Complexionen auch $=2^n-1$ (vergl. §. 65. Zuf. 5.).

Beyspiel. Die Zahl 2310 ist ein Produkt aus den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 ohne Wiederholung einer dieser Zahlen; daher hat jene Zahl 2^5-1 oder 31 Faktoren oder Divisoren, welche diese Zahl messen, die Einheit und die Zahl selbst ausgeschlossen.

§. 162. Lehrsatz. Die Zahl der Complexionen von n gegebenen verschiedenen Elementen durch Combination nach m mit Wiederholungen ist durch die Formel

$$\frac{n.n+1.n+2.n+3\ldots.(n+m-1)}{1.2.3.4\ldots m}$$

gegeben.

Beweis. Aus §. 65. Zuf. 1. unter 4), verglichen mit den im §. 65. entwickelten Potenzen von $a+b$, erhellt, daß, wenn man den Coeffizienten des zweyten Gliedes dieser Potenzen den ersten nennt, die Summe der zweyten Coeffizienten, z. B. der 5 ersten Potenzen von $a+b$, gleich sey dem dritten Coeffizienten der 6ten Potenz von $a+b$. Denn dieser Coeffizient ist = dem 2ten + 3ten der 5. Potenz = 10 + (dem 2. + 3.) Coeffiz. der 4. Potenz = 10 + 6 + (dem 2. + 3.) Coeffiz. der 3. Potenz = 10 + 6 + 3 + (dem 2. + 3.) Coeffiz. der 2. Potenz = 10 + 6 + 3 + 1 + 0 (indem für die 2te Potenz kein viertes Glied Statt findet) = 20. Auf gleiche Weise erhellt, daß z. B. die Summe der dritten Coeffizienten, z. B. der 6 ersten Potenzen von $a+b$ nothwendig gleich sey dem vierten Coeffizienten der 7. Potenz von $a+b$, indem man stufenweise hinab jedesmal den 4. Coeffiz. der nächst höheren Potenz in die

gleiche Summe des 3. + 4. Coeffiz. der nächst niedern Potenz auflöst. Auf gleiche Weise im Allgemeinen.

Dieses vorausgesetzt, geben die n verschiedene Elemente n Unionen. Indem man nun 1) diesen Unionen a, b, c, d . . . nach der Ordnung das Element a, dann von b an das Element b, von c an das Element c, u. s. w. vorsetzt: so ist klar, daß man Binionen ohne Versetzungen, wie ab, ac (ohne ba, ca), aber mit Wiederholungen, wie aa, bb, cc,... erhalte; daß ferner die Zahl der mit a anfangenden Binionen = n, der mit b anfangenden = n—1, der mit c anfangenden = n—2, u. s. w. sey. Es ist also die Zahl aller Binionen aus den n Dingen durch die Summe $n+(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots+2+1 = \frac{(n+1).n}{1.2}$ (§. 129.) gegeben.

Wenn man 2) allen Binionen das erste Element a, dann den Binionen von der Ordnung c, d, e . . . das dritte Element c, u. s. w. vorsetzt: so erhält man durch den ersten Akt soviel Ternionen, als n Dinge Binionen gaben, d. i. $\frac{(n+1)n}{1,2}$ Ternionen; durch den zweyten Akt erhält man (wegen Uebergehung der n Binionen von der Ordnung a) n Ternionen weniger, als durch den ersten Akt, d. i. $\frac{(n+1)n}{1.2} - n = \frac{n.n-1}{1.2}$ Ternionen; durch den dritten Akt erhält man, wegen Uebergehung der (n—1) Binionen von der Ordnung b, wieder n—1 Ternionen weniger, als durch den 2ten Akt, d. i. die Summe von $\frac{n.n-1}{1.2} - (n-1)$, d. i. von $\frac{n-1.n-2}{1.2}$ Ternionen; durch den vierten Akt eben so die Summe von $\frac{n-1.n-2}{1.2} - (n-2)$, d. i. $\frac{n-2.n-3}{1.2}$ Ternionen,

u. s. w.; wobey man sieht, daß man diese letzteren Summenausdrücke kurz dadurch erhalte, daß man im ersten Ausdrucke $\frac{(n+1)n}{1.2}$ nach und nach $n-1$, $n-2$, ... statt n substituirt. Da endlich durch den letzten Akt nur eine $\left(=\frac{2.1}{1.2}\right)$ Ternion (z. B. wie eee für 5 gegebene Elemente a, b, c, d, e) erzeugt wird: so ist die Summe aller Ternionen

$$= \frac{2.1}{1.2} + \ldots + \frac{n-2.n-3}{1.2} + \frac{n-1.n-2}{1.2}$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2} + \frac{(n+1)n}{1.2}.$$

Nun ist nach §. 65. Zus. 1. Nr. 5. $\frac{n.n-1}{1.2}$ unserer Voraussetzung gemäß der zweyte Coeffizient der nten, wie $\frac{(n+1)n}{1.2}$ der 2te Coeffizient der $(n+1)$ten Potenz von $a+b$, folglich ist die vorige Summe die Summe der zweyten Coeffizienten aller Potenzen von $a+b$, von der 1. bis zur $(n+1)$ten Potenz hinauf, demnach (vermöge des im Eingange Bewiesenen) gleich dem dritten Coeffizienten der $(n+2)$ten Potenz von $a+b$. Dieser Coeffizient ist aber, wenn in der Formel $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ statt n substituirt wird $n+2$, $= \frac{n+2.n+1.n}{1.2.3}$; also drückt eben diese Formel die Summe aller Ternionen aus n verschiedenen Dingen mit Wiederholungen aus.

Wenn man 3) mit den Ternionen auf gleiche Weise, wie vorhin mit den Binionen, verfährt, um nun die Quaternionen zu bilden: so erhellt leicht, daß man folgende Partialsummen der Quaternionen nach den verschiedenen Ordnungen erhalte:

I. $\frac{n+2.n+1.n}{1.2.3}$; II. $\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}$;

III. $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$; .... und letzte $= \frac{3.2.1}{1.2.3} = 1$.

Diese Ausdrücke, rückwärts gelesen, sind die dritten Binomialcoeffizienten der Potenzen von 1 an bis zur $(n+2)$ten Potenz, also ist ihre Summe = dem 4. Binomialcoeffizienten der $(n+3)$ten Potenz = $\frac{n+3.n+2.n+1.n}{1.2.3.4}$; demnach ist diese Formel auch der Ausdruck der Summe aller Quaternionen.

Da dasselbe Verfahren soweit fortgesetzt werden kann, als man will, und dieselbe Schließart immer wiederkehrt: so erhellt, daß wenn n verschiedene Elemente überhaupt nach m combinirt und Wiederholungen zugelassen werden, die im Lehrsatze angegebene Formel die Zahl aller Complexionen ausdrücke.

Beyspiel. Man will die Zahl der Würfe wissen, die mit 5 Würfeln möglich sind, ohne daß die Anzahl aller Augen eines Wurfes durch dieselben Augen eines andern Wurfes gegeben sey, oder eine Permutation Statt finde; wo also Würfe, wie 34561 und 65431, ... nicht zugleich, wohl aber Würfe, wie 22222,... Statt haben sollen. In diesem Falle wird nach der Zahl der Complexionen durch Combination nach 5 aus 6 verschiedenen Elementen (den 6 Augen eines Würfels) mit Wiederholungen gefragt. Es ist also diese Zahl $= \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5}$ $= 252$.

Zusatz 1. Die Formel unseres Lehrsatzes ist gleichbedeutend mit dieser

$$\frac{m+1.m+2.m+3.m+4...(m+n-1)}{1.2.3.4...(n-1)}.$$

Denn drückt man jene erste Formel so aus:

$$\frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \ldots (n+m-2)\,(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-3 \cdot m-2 \cdot m-1 \cdot m}$$

so sieht man, daß die Faktoren des Zählers, welche $= m - 3$, $= m-2$ u. s. w. sind, gegen die im Nenner weggelassen werden können, so daß im Zähler nur noch Faktoren bleiben, die größer m oder $= m+1$, $= m+2$, u. s. w. sind. Ferner sieht man, daß von den Faktoren 1.2.3... des Nenners nur die noch bleiben, welche, verglichen mit den Faktoren des Zählers, kleiner n sind, weßwegen denn die noch bleibenden Faktoren des Nenners durch $1.2.3.4 \ldots n-1$, wie die des Zählers durch $m+1 \cdot m+2 \ldots (m+n-1)$ gleichförmig ausgedrückt werden.

Zusatz 2. Die Zahl der Unionen ist $= n$ oder $= \frac{n+1}{1} - 1$; nun ist $\frac{n+1}{1}$ der erste, und $\frac{(n+1)\,n}{1 \cdot 2}$ der zweyte Coeffizient der Potenz $(a+b)^{n+1}$, diese Coeffizienten vom zweyten Gliede an gezählt. Also ist vermöge §. 65. Zus. 1. Nr. 4.) die Summe beyder $=$ dem zweyten Coeffizienten der Potenz $(a+b)^{n+2}$, oder $= \frac{n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2}$, folglich die Zahl der Unionen $+$ der Zahl der Binionen $= \frac{n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2} - 1$.

Eben so ist die Zahl der Ternionen $= \frac{n+2 \cdot n+1 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. der 3te Coeffizient der $(n+2)$ten Potenz von $a+b$, demnach die Summe dieses und des vorigen Coeffizienten $\frac{n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2}$ gleich dem 3ten Binomialcoeffizienten der $(n+3)$ten Potenz $= \frac{n+3 \cdot n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, also ist auch die Zahl der Unionen, Binionen und Ternionen zusammengenommen $= \frac{n+3 \cdot n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1$. U. s. w.

Daher ist denn allgemein die Zahl aller Complexionen von den Unionen an bis zu den mtionen

$$= \frac{n+1 . n+2 . n+3 \ldots . n+m}{1 . 2 . 3 \ldots . m} - 1.$$

§. 163. Aufgabe. Wenn unter den n gegebenen Dingen einige mehrmals vorkommen: die Anzahl der Complexionen aller Klassen mit der Zahl der reinen Complexionen der nicht wiederholten Elemente zu finden.

Auflösung. Es seyen z. B. 3 wiederholte Elemente a^4, b^3, c^2, und die übrigen $n-3$ Elemente seyen d, e, f, . . . Die wiederholten Elemente geben: a für sich 4 Complexionen (a, aa, aaa, aaaa), b für sich 3, c für sich 2, also zusammen 9 Complexionen. Nimmt man die ersten Complexionen in Beziehung auf a mit den zweyten in Beziehung auf b zusammen: so erhält man $4.3 = 12$ Complexionen (wie ab, abb, abbb; aab, aabb, ...). Die ersten Complexionen eben so mit den 3ten in Beziehung auf c, dann die zweyten mit den 3ten eben so verbunden, hat man resp. $4.2 = 8$, und $3.2 = 6$, also zusammen 26 Complexionen. Nimmt man sie ferner alle 3 zusammen, so daß man Complexionen, wie abc, abcc, abbc . . . ., erhält: so hat man noch $4.3.2 = 24$, folglich in Allem $9 + 26 + 24 = 59$ Complexionen.

Nun geben die $(n-3)$ übrigen Elemente nach §. 161. Zus. 3. $2^{n-3} - 1$ reine Complexionen, und diese Zahl, mit der Anzahl der Complexionen aus den wiederholten Elementen multiplizirt, giebt die Zahl $59(2^{n-3} - 1)$; also ist die Totalsumme aller Complexionen der n Elemente $= 59 + (2^{n-3} - 1) + 59(2^{n-3} - 1) = 59 + 2^{n-3} - 1 + 59 . 2^{n-3} - 59 = 60 . 2^{n-3} - 1.$

Beyspiel. Die Zahl 831600 ist ein Produkt aus den Primzahlen 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 7, 11; sie hat also, da hier $n = 5$ ist, $60 . 2^2 - 1 = 240 - 1 = 239$ Faktoren, die Zahl selbst und die Einheit ausgeschlossen.

Bayerische Staatsbibliothek München

Verbesserungen.

S. 27. Zeile 1. statt a— lese man —a.

S. 69. Z. 6. von unten st. $4a^3(a^3 \ldots$ l. $4a^3(2a^3 \ldots$

S. 93. Z. 2. — — — st. Erkl. 2. l. Erkl. 3.

S. 94. Z. 7. st. $\sqrt[n]{a^n}$ l. $\sqrt[m]{a^m}$.

S. 105. Z. 12. st. $\sqrt[9]{} \ldots$ l. $\sqrt[8]{} \ldots$

S. 117. Z. 6. ist zu lesen:

$$\frac{z(a-\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(a^2-b-c)+2\sqrt{bc}} = \frac{z(a-\sqrt{b}+\sqrt{c})(a^2-b-c-2\sqrt{bc})}{(a^2-b-c)^2-4bc}.$$

S. 248. Z. 12. von unten st. b : pq l. b : bq.

S. 286. Z. 8. statt + . . . l. $= \frac{n^2+n}{2}$.

Bogen 19. sollte mit S. 289. st. 287. anfangen, und mit S. 304. st. 302. enden.

Buchbinder-Lehrwerkstätte
Nikolausheim
Bürrlauingen bei Günzburg

Buchbinder-Lehrwerkstätte
Nikolausheim
Bürrlauingen bei Günzburg

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schön, Johann,

Lehrbuch der niedern, reinen, allgemeinen Größenlehre, oder der Buchstabenrechnung und Algebra zum Besuche öffentlicher Vorlesungen u. des Selbstunterrichtes hrsg

Würzburg 1825

Don.Lud. 567
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10728094-7